

Partie I

$$1. \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2. La fonction F est polynomiale en ses variables, elle admet donc des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 et :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial F}{\partial a}(a, b) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = -2n(\bar{y} - a - b\bar{x})$$

$$\text{et } \frac{\partial F}{\partial b}(a, b) = -2 \sum_{i=1}^n x_i(y_i - a - bx_i) = -2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - a n \bar{x} - b \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)$$

Remarquons que les x_i sont distincts, donc :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \neq 0$$

Ainsi, puisque $n > 1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a, b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \bar{y} - b\bar{x} \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}(\bar{y} - b\bar{x}) - b \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \bar{y} - b\bar{x} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \bar{y} - b\bar{x} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \end{cases}$$

Le système d'équations admet donc un unique couple solution.

3. Il existe une unique droite d'équation $y = \hat{a} + \hat{b}x$ dont la distance au nuage de points $((x_i, y_i))_{1 \leq i \leq n}$ (au sens des moindres carrés) est minimale. Cela revient à montrer l'existence et l'optimalité de la droite de régression linéaire par la méthode des moindres carrés.

4. On trouve $\hat{a} = 2$ et $\hat{b} = 3$.

5. a. On calcule la somme des termes de la liste, qu'on divise par la longueur de la liste.

```
def moyenne(L):
    n = len(L)
    s = 0
    for x in L:
        s += x
    return s/n
```

b. Les réponses i et iv sont les seules correctes.

c. On calcule tout d'abord la moyenne des valeurs de la liste x puis on utilise la définition de \hat{b} en calculant numérateur et dénominateur séparément.

```
def Bchap(x, y):
    xbar = moyenne(x)
    n = len(x)
    num, denom = 0, 0
    for i in range(n):
        num += y[i] * (x[i] - xbar)
        denom += (x[i] - xbar)**2
    return num/denom
```

d. On utilise la formule $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

```
def Achap(x, y):
    xbar, ybar = moyenne(x), moyenne(y)
    b = Bchap(x, y)
    return ybar - b*xbar
```

Partie II

1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La variable $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$ admet une espérance par linéarité ($a + bx_i$ est déterministe et ε_i admet une espérance) et :

$$\mathbb{E}(Y_i) = a + bx_i + \mathbb{E}(\varepsilon_i) = a + bx_i.$$

2. Par linéarité $\sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x})$ admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x})\right) &= \sum_{i=1}^n (a + bx_i)(x_i - \bar{x}) \\ &= b \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}x_i) \\ &= b \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i \right) \\ &= \boxed{b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.\end{aligned}$$

3. Par linéarité, on en déduit que \hat{b} admet une espérance égale à b , i.e. $\mathbb{E}(\hat{b} - b) = 0$. Ainsi \hat{b} est un estimateur sans biais de b .

4. Par linéarité de l'espérance, \bar{Y} admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(\bar{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) = a + b\bar{x}.$$

Par linéarité \hat{a} admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(\hat{a}) = \mathbb{E}(\bar{Y}) - \bar{x} \mathbb{E}(\hat{b}) = a,$$

i.e. \hat{a} est un estimateur sans biais de a .

5. D'après la définition des Y_i , on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^n (Y_i - a - bx_i)(x_i - \bar{x}) \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x}) - a \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) - b \sum_{i=1}^n x_i(x_i - \bar{x}) \\ &= \hat{b} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\hat{b} - b = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

6. Les variables aléatoires Y_i sont indépendantes (par indépendance des ε et le lemme des coalitions) et admettent une variance. Ainsi, \hat{b} admet une variance, en tant que combinaison linéaire de variables indépendantes admettant une variance.

Par invariance de la variance par translation, $\hat{b} - b$ admet une variance et :

$$V(\hat{b}) = V(\hat{b} - b).$$

7. Par indépendances des ε_i et propriétés de la variance, on a :

$$\begin{aligned}V(\hat{b}) &= V(\hat{b} - b) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 V(\varepsilon_i)}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.\end{aligned}$$

8. a. Dans les conditions de l'énoncé, $\bar{x} = \frac{n+1}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{12} [2(2n+1) - 3(n+1)] \\ &= \boxed{\frac{n(n^2-1)}{12}}.\end{aligned}$$

b. D'après la formule de Bienaymé-Tchebychev, puisque \widehat{b}_n admet une variance, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, 0 \leq \mathbb{P} \left(\left| \widehat{b}_n - b \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{V(\widehat{b}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{12\sigma^2}{\varepsilon n(n^2 - 1)}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12\sigma^2}{\varepsilon n(n^2 - 1)} = 0$, on en déduit par encadrement que :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \widehat{b}_n - b \right| \geq \varepsilon \right) = 0,}$$

c'est-à-dire $(\widehat{b}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers b .

9. a. Remarquons que :

$$\tilde{b} = \sum_{i=1}^n \mu_i Y_i = \sum_{i=1}^n \mu_i (a + bx_i + \varepsilon_i) = b + \sum_{i=1}^n \mu_i \varepsilon_i.$$

Puisque les ε_i sont indépendants et admettent une variance, \tilde{b} admet une variance et :

$$V(\tilde{b}) = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 V(\varepsilon_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \mu_i^2.$$

De la même manière, en notant $v = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$:

$$\begin{aligned} \tilde{b} - \widehat{b} &= (\tilde{b} - b) + (b - \widehat{b}) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i \varepsilon_i - \frac{1}{v} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (x_i - \bar{x}) \\ &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^n (v\mu_i - x_i + \bar{x}) \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Par le même argument, $\tilde{b} - \widehat{b}$ admet une variance et :

$$\begin{aligned} V(\tilde{b} - \widehat{b}) &= \frac{\sigma^2}{v^2} \sum_{i=1}^n (v\mu_i - (x_i - \bar{x}))^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{v^2} \sum_{i=1}^n (v^2 \mu_i^2 - 2v\mu_i(x_i - \bar{x}) + (x_i - \bar{x})^2) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n \mu_i^2 - 2\frac{\sigma^2}{v} + \frac{\sigma^2}{v} \\ &= V(\tilde{b}) - V(\widehat{b}). \end{aligned}$$

On en déduit donc que : $\boxed{V(\tilde{b}) = V(\tilde{b} - \widehat{b}) + V(\widehat{b})}.$

b. Puisque $V(\tilde{b} - \widehat{b}) \geq 0$ (par positivité de la variance), il vient immédiatement que :

$$\boxed{V(\tilde{b}) \geq V(\widehat{b})}.$$

10. Remarquons que \widehat{b} est un estimateur sans biais de b qui s'écrit comme combinaison linéaire des Y_i . Soit $B = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i$ un estimateur sans biais de b (pour toute valeur de a et b).

Ainsi :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, b = \mathbb{E}(B) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a + bx_i) = a \sum_{i=1}^n \lambda_i + b \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i,$$

On en déduit que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 1.$$

D'après la question précédente, $V(B) \geq V(\widehat{b})$. On en déduit que \widehat{b} est de variance minimale parmi les estimateurs sans biais de b (pour tous a et b).

Partie III

1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque ε_i suit une loi normale, $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$ suit aussi une loi normale. Par indépendance des variables aléatoires $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$, les variables $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont

indépendantes. Ainsi, \widehat{b} , vue comme une combinaison linéaire des variables $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ suit une loi normale. Ainsi \widehat{b} suit la loi normale $\mathcal{N}(m, s^2)$ où :

$$m = \mathbb{E}(\widehat{b}) = b \text{ et } s^2 = V(\widehat{b}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

2. a. Étant dans la phase de floraison, on a $b = 0$.

Par définition de \bar{Y} :

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + bx_i + \varepsilon_i) = a + \bar{\varepsilon}.$$

Ainsi $Y_i - \bar{Y} = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et :

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2.$$

b. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \varepsilon_i - \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \varepsilon_j = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}.$$

On en déduit que $\Gamma \tilde{E} = E$.

c. Toutes les colonnes de J sont égales et non nulles donc $\text{rg } J = 1$.

d. En notant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur en question, on trouve $JX = 4X$. Puisque $X \neq 0$, on en déduit que X est vecteur propre de J associé à la valeur propre 4.

e. Le réel 0 est valeur propre de J car $\text{rg } J = 1$. D'après le théorème du rang, $\text{Ker } J = E_0(J)$ est de dimension 3.

Le réel 4 est valeur propre de J . Ainsi $\dim E_4(J) \geq 1$. Puisque la somme de dimension des espaces propres de J ne peut dépasser 4, $\dim E_4(J) = 1$ et J n'admet pas d'autres valeurs propres.

f. Il vient immédiatement que $\Gamma = I_4 - \frac{1}{4}J$.

Première méthode : on raisonne sur les valeurs propres de Γ .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Remarquons que :

$$\begin{aligned} \text{rg}(\Gamma - \lambda I_4) &= \text{rg}\left(I_4 - \frac{1}{4}J - \lambda I_4\right) \\ &= \text{rg}\left(-\frac{1}{4}J + (1 - \lambda)I_4\right) \\ &= \text{rg}(J - 4(1 - \lambda)I_4) \quad (\text{le rang est invariant par multiplication par } -4). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(\Gamma) &\Leftrightarrow \text{rg}(\Gamma - \lambda I_4) \neq 4 \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(J - 4(1 - \lambda)I_4) \neq 4 \\ &\Leftrightarrow 4(1 - \lambda) \in \text{Sp}(J) \\ &\Leftrightarrow 4(1 - \lambda) = 0 \text{ ou } 4(1 - \lambda) = 4 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 0. \end{aligned}$$

Deuxième méthode : on raisonne sur les vecteurs propres de Γ .

Soit $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ un vecteur non nul et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque :

$$\Gamma X = \lambda X \Leftrightarrow \left(I_4 - \frac{1}{4}J\right) X = \lambda X \Leftrightarrow X - \frac{1}{4}JX = \lambda X \Leftrightarrow JX = 4(1 - \lambda)X$$

Ainsi, λ une valeur propre de Γ si et seulement si $4(1 - \lambda)$ est une valeur propre de J . Remarquons de plus que X est vecteur propre de Γ si, et seulement si, X est vecteur propre de J , i.e. les espaces propres de Γ sont les espaces propres de J . Puisque J admet 0 et 4 comme valeurs propres, les valeurs propres de Γ sont 0 et 1.

On pouvait aussi diagonaliser J puis en déduire une diagonalisation de Γ .

g. La matrice Γ est symétrique réelle donc diagonalisable via une matrice de passage orthogonale. Pour déterminer une matrice D semblable à Γ , il faut déterminer la dimension des espaces propres de Γ . D'après l'équivalence montrée à la question précédente, $E_0(\Gamma) = E_4(J)$ et $E_1(\Gamma) = E_0(J)$ (d'après l'égalité des rangs dans le raisonnement sur les valeurs propres et la remarque dans le raisonnement sur les vecteurs propres) donc $\dim E_0(\Gamma) = 1$ et $\dim E_1(\Gamma) = 3$.

Il existe donc une matrice de passage P orthogonale, i.e. vérifiant $PP^T = I_4$, telle que $\Gamma = PDP^T$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

h. Remarquons que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 &= E^T E \\ &= (\Gamma \tilde{E})^T \Gamma \tilde{E} \\ &= \tilde{E}^T \Gamma^T \Gamma \tilde{E} \\ &= \tilde{E}^T P D^2 P^T \tilde{E} \\ &= (P^T \tilde{E})^T D^2 P^T \tilde{E} \\ &= V^T D^2 V \end{aligned}$$

Or :

$$V^T D^2 V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 V_i^2.$$

On en déduit que :

$$\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 V_i^2.$$

i. Les variables aléatoires $W_i = \frac{1}{\sigma} V_i$ suivent toutes la loi normale centrée réduite. Par indépendances des variables V_1, V_2 et V_3 , les variables W_1, W_2 et W_3 sont indépendantes. Puisque $n = 4, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = 0$, on a (d'après 2.a) :

$$\frac{3\hat{\sigma}}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i^4 V_i^2 = \sum_{i=1}^3 W_i.$$

On en déduit que $\frac{3\hat{\sigma}}{\sigma^2}$ suit la loi du $\chi(3)$.

3. L'idée est de chercher la valeur n_1 (en les testant toutes) qui minimise la quantité :

$$\sum_{i=1}^{n_1} (y_i - a_1 - b_1 x_i)^2 + \sum_{i=n_1+1}^n (y_i - a_2 - b_2 x_i)^2$$

pour tout quadruplet de réels (a_1, b_1, a_2, b_2) . On obtient alors le temps T_1 , étant la n_1 -ème valeur de temps thermique mesurée.

4. L'idée est identique, il s'agit de chercher le couple (n_1, n_2) (où $n_1 < n_2$) qui minimise la quantité :

$$\sum_{i=1}^{n_1} (y_i - a_1 - b_1 x_i)^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} (y_i - a_2 - b_2 x_i)^2 + \sum_{i=n_2+1}^n (y_i - a_3 - b_3 x_i)^2$$

pour tout $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$. On obtient alors les temps T_1 et T_2 , étant la n_1 -ème et la n_2 -ème valeurs de temps thermique mesurées.

Partie IV

1. a. La fonction u est de classe C^4 au voisinage de x_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc, d'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$u(x) \underset{x \rightarrow x_i}{=} \sum_{k=0}^4 \frac{u^{(k)}(x_i)}{k!} (x - x_i)^k + o((x - x_i)^4).$$

b. Soit $i \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$. En appliquant le résultat précédent à $x = x_{i+1}$ et $x = x_{i-1}$ on a :

$$u(x_{i+1}) \underset{h \rightarrow 0}{=} u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x_i) + o(h^4)$$

$$\text{et } u(x_{i-1}) \underset{h \rightarrow 0}{=} u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) - \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x_i) + o(h^4).$$

Ainsi :

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_i}{h^2} = u''(x_i) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i) + o(h^2),$$

c'est-à-dire :

$$u''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_i}{h^2} + e(h) \text{ où } e(h) = -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i) + o(h^2).$$

2. a. On peut appliquer le résultat de la question précédente à la fonction $u : x \mapsto a_1 + b_1 x$ car $x_{i+1} \leq T_1$. Cette fonction étant affine, sa dérivée seconde est nulle et ainsi :

$$D_i = o(h^2).$$

On trouve même que $D_i = 0$ par calcul direct.

b. Remarquons qu'à l'instant i tel que $x_i = T_1$, on a $D_i = \frac{b_2 - b_1}{h}$.

On parcourt alors toutes les entiers i de 2 à $n - 1$ et on calcule D_i . La première valeur de i pour laquelle D_i est significativement non nul nous donne l'instant T_1 ; la seconde nous donne l'instant T_2 .

3. a. La fonction `Mystere` renvoie le premier indice du maximum d'une liste de nombres passées en argument.

b. `Mystere([])` "renvoie" (lève) une erreur car `L[0]`, calculé à la troisième ligne de la fonction, n'existe pas.

c. Il suffit de remarquer qu'à tout moment, `m` est à l'indice `p` dans la liste.

La fonction renvoie cette fois-ci 0 lorsque la liste est vide.

```
def Mystere(L):
    n = len(L)
    p=0
    for k in range(1, n):
        if L[p] < L[k]:
            p=k
    return p
```

d. (i) Puisque les valeurs sont supposées deux-à-deux distinctes, il suffit de considérer les deux dernières (resp. premières) valeurs de la liste triée dans l'ordre croissant (resp. décroissant).

(ii) On utilise la question précédente.

```
def DeuxMax(L):
    """renvoie les deux plus grandes valeurs d'une liste (non
    nécessairement triée) de nombres supposés tous distincts"""
    n = len(L)
    p1 = Mystere(L)
    p2 = 0
    for k in range(1, n):
        if L[p2] < L[k] < L[p1]:
            p2 = k
    return p1, p2 # parenthèses inutiles !
```

4. a. Puisque $x_{i+1} \leq T_1$, on a

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \\ &= \frac{(a_1 + b_1 x_{i+1} - (-1)^i \varepsilon) - 2(a_1 + b_1 x_i + (-1)^i \varepsilon) + (a_1 + b_1 x_{i-1} - (-1)^i \varepsilon)}{h^2} \\ &= \boxed{(-1)^{i+1} \frac{4\varepsilon}{h^2}}. \end{aligned}$$

b. Remarquons qu'à l'instant i tel que $x_i = T_1$, on a $D_i = \frac{b_1 - b_2}{h} + \frac{4(-1)^{i-1}}{h^2} \varepsilon$.

Si ε est négligeable devant $\frac{b_1 - b_2}{h}$, on reprend la méthode décrite à la question 2.b.

5. a. Une itération de lissage donne, pour tout $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$:

$$y_i^1 = y_i^0 + \alpha D_i = a_1 + b_1 x_i + \varepsilon_i + \alpha (-1)^{i+1} \frac{4\varepsilon}{h^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{y_i^1 = a_1 + b_1 x_i + C(\alpha, h) \varepsilon_i \text{ où } C(\alpha, h) = 1 - \frac{4\alpha}{h^2}.$$

b. On réduit le bruit si et seulement si $|C(\alpha, h) \varepsilon_i| < |\varepsilon_i|$. Or :

$$|C(\alpha, h) \varepsilon_i| < |\varepsilon_i| \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{4\alpha}{h^2} < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{h^2}{2}.$$

Pour réduire le bruit, il faut et il suffit de choisir $\alpha \in \left] 0, \frac{h^2}{2} \right[$.

On peut supprimer le bruit : il faut choisir α tel que $C(\alpha, h^2) = 0$, i.e $\alpha = \frac{h^2}{4}$.

c. On reprend la formule de récurrence sans oublier les conditions aux bords.

```
def Lisse(Y, a, h):
    nvY = Y[:] # copie (superficielle) de Y
    n = len(Y)
    for i in range(1, n-1):
        nvY[i] += a*(Y[i-1]-2*Y[i]+Y[i+1])/(h**2)
    return nvY
```

Le code ci-dessus ne modifie pas la liste `Y` passée en argument mais la copie (pour éviter les effets de bord !).

- d. On calcule toutes les valeurs des D_i et on cherche les instants correspondant aux deux plus grands D_i en valeurs absolues.
- e. La méthode n'est pas satisfaisante car le lissage réduit les ruptures de pente, ne fournissant alors des temps T_1 et T_2 très approximatifs.