Partie I : définition et propriétés de la fonction A

1. La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Elle réalise donc une bijection entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$.

2. Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \in [-1, 1]$ et $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que :

$$\boxed{A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.}$$

   Puisque $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1, 1]$ et $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que :

$$\boxed{A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}.}$$

3. La représentation graphique de A se déduit de celle de la restriction de fonction sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par symétrie par rapport à la première bissectrice (i.e. la droite d'équation $y = x$) :

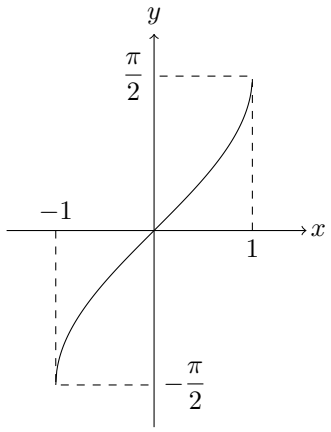

Figure 1 – Représentation graphique de la fonction A

On notera les tangentes verticales en -1 et 1, ainsi que la tangente de pente 1 en 0.

4. Soit $x \in [-1, 1]$. On a $\cos^2(A(x)) + \sin^2(A(x)) = 1$. Or $\sin(A(x)) = x$ donc :

$$\cos^2(A(x)) = 1 - x^2.$$

   Puisque $A(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \cos(A(x)) \geqslant 0$ et ainsi :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ \cos(A(x)) = \sqrt{1 - x^2}.}$$

5. La fonction sinus réalise une bijection continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $[-1, 1]$. De plus sa dérivée, la fonction cosinus, ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   Puisque que $\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-1, 1[$, La fonction A est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ A'(x) = \frac{1}{\sin'(A(x))} = \frac{1}{\cos(A(x))} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.}$$

6. a. $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}} \underset{t \to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}t + o(t).}$

   b. D'après la question précédente, puisque $\lim\limits_{x \to 0} -x^2 = 0$, on a :

$$A'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

   En intégrant ce développement limité, on obtient :

$$A(x) \underset{x \to 0}{=} A(0) + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

   Or $\sin(0) = 0$, donc $A(0) = 0$. Ainsi :

$$\boxed{A(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).}$$

Partie II : étude d'une variable aléatoire

1. Puisque $\Theta(\Omega) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $X(\Omega) = [0, 1]$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   - Si $x < 0$, $F_X(x) = 0$.
   - Si $x > 1$, $F_X(x) = 1$.

- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leqslant x) \\ &= P(\sin\Theta \leqslant x) \\ &= P(\Theta \leqslant A(x)) \ \text{ car } A \text{ réalise une bijection croissante sur } [-1,1] \\ &= \frac{2A(x)}{\pi} \ \text{ car } \Theta \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) \text{ et } A(x) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

La fonction de répartition de X est donc la fonction :

$$\boxed{F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2A(x)}{\pi} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

2. La fonction F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ (par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$) ainsi que sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]1,\infty[$.

Puisque $A(1) = \dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$\lim_{1^+} F_X = 1, \ \lim_{0^-} F_X = \frac{2A(1)}{\pi} = 1 \text{ et } F_X(1) = 1.$$

De plus :

$$\lim_{0^-} F_X = 0, \ \lim_{0^+} F_X = \frac{2A(0)}{\pi} = 0 \text{ et } F_X(0) = 0.$$

La fonction de répartition de X est donc continue en 0 et 1. D'après ce qui précède, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. La variable aléatoire X est donc à densité. De plus, une densité de X est donnée par :

$$\boxed{F_X : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2A'(x)}{\pi} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

3. La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{2x}{\pi\sqrt{1-x^2}}\right)$ est continue sur $[0,1[$ Soit $A \in [0,1[$.

$$\int_0^A \left|\frac{2x}{\pi\sqrt{1-x^2}}\right| \mathrm{d}x = \int_0^A \frac{2x}{\pi\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \left[\frac{-2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\right]_0^A \underset{A\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{2x}{\pi\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$ converge absolument et vaut $\dfrac{2}{\pi}$. Puisque F_X est nulle en dehors de $]0,1[$, il vient que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xF_X(x) \mathrm{d}x$ converge absolument. Ainsi X admet une espérance et :

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xF_X(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.}$$

4. La fonction sin est une fonction $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. En posant $x = \sin t$, on a $\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$. Puisque $\sin\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right) = [0,1[$, les intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{2x^2}{\pi\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 t}{\pi\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \, \mathrm{d}t.$$

sont de même nature (et égales en cas de convergence) par changement de variables. Or, pour tout $t \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos t \geqslant 0$ donc $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ et :

$$\frac{2\sin^2 t}{\pi\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \sin^2 t \, \mathrm{d}t.$$

Puisque la fonction $\sin^2$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, l'intégrale J est faussement impropre, donc convergente. L'intégrale I converge donc (absolument), i.e. X^2 admet une espérance. Calculons sa valeur.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(2t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on trouve $\boxed{E(X^2) = \dfrac{1}{2}.}$

5. a. Par linéarité de l'espérance, M_n admet une espérance car $X_1, \ldots, X_n$ en admettent une et on a :

$$\boxed{E(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = E(X) = \frac{2}{\pi}.}$$

Puisque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et admettent une variance, $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance. Ainsi M_n admet une variance et :

$$\begin{aligned} V(M_n) &= \frac{1}{n^2} V(X_1 + \cdots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \\ &= \frac{1}{n} \left(E(X^2) - E(X)^2 \right) \text{ d'après la formule de König-Huygens} \\ &= \boxed{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \right).} \end{aligned}$$

b. Si U admet un moment d'ordre 2, alors, pour tout $a > 0$, on a :

$$P\left(|U - E(U)| \geqslant a \right) \leqslant \frac{V(U)}{a^2}.$$

c. Puisque M_n admet une variance, en posant $\boxed{a = \sqrt{\frac{100 V(M_n)}{5}}}$ on obtient l'inégalité :

$$P\left(|M_n - E(M_n)| \geqslant a \right) \leqslant \frac{V(M_n)}{a^2} = \frac{5}{100}.$$

Ainsi, par passage au complémentaire :

$$P\left(E(M_n) - a < M_n < E(M_n) + a \right) \geqslant \frac{95}{100}.$$

En posant alors $\boxed{a_n = E(X) - \frac{a}{n} V(X)}$ et $\boxed{b_n = E(X) + \frac{a}{n} V(X)}$ on obtient l'inégalité recherchée $P(M_n \in [a_n, b_n]) \geqslant 95\%$.

6. a. Pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n} \in [0, 1]$ donc :

$$P\left(X \leqslant \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{\pi} A\left(\frac{1}{n} \right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{2}{\pi n} + \frac{1}{3\pi n^3} + o\left(\frac{1}{n^3} \right)$$

Il vient alors que $P\left(X \leqslant \frac{1}{n} \right) - \frac{2}{\pi n} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{3\pi n^3} + o\left(\frac{1}{n^3} \right)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{P\left(X \leqslant \frac{1}{n} \right) - \frac{2}{\pi n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{3\pi n^3}.}$$

Les constantes a et b recherchées sont $a = \frac{2}{\pi}$ et $b = \frac{1}{3\pi}$.

b. (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1 - F_X\left(1 - \frac{1}{n} \right)$. Par continuité de F_X en 1, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 1 - F_X(1) = 0}$$

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - p_n) \right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} P\left(X \leqslant 1 - \frac{1}{n} \right) \right) = \sin\left(A\left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) = 1 - \frac{1}{n}.}$$

(iii) $\boxed{\cos(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2 \right).}$

(iv) Pour tout n non nul, on a :

$$1 - \frac{1}{n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} p_n \right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} p_n \right).$$

ou encore :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} p_n \right) - 1 = -\frac{1}{n}.$$

D'après la question précédente, $\cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. Ainsi, puisque la suite $(p_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0, $-\frac{\pi^2 p_n^2}{8} \underset{n \to +\infty}{\sim} \cos\left(\frac{\pi}{2} p_n \right) - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$, soit $\boxed{p_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}}.}$

La constante c recherchée est $c = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Partie III : étude d'une suite de fonctions définies à l'aide de la fonction arcsinus

1. Il vient immédiatement que $\boxed{f_0 : x \mapsto 1}$ et ainsi $\boxed{P_0 = 1.}$

$$\forall x \in [-1, 1],\ f_1(x) = \cos(2A(x)) = 1 - 2\sin^2(A(x)) = 1 - 2x^2.$$

Ainsi $\boxed{f_1 : x \mapsto 1 - 2x^2}$ et $\boxed{P_1 = 1 - 2X^2.}$

$$\forall x \in [-1, 1],\ f_2(x) = \cos(2 \times 2A(x)) = 2\cos^2(2A(x)) - 1 = 2\left(1 - 2x^2 \right)^2 - 1.$$

Ainsi $\boxed{f_2 : x \mapsto 2\left(1 - 2x^2 \right)^2 - 1}$ et $\boxed{P_2 = 2\left(1 - 2X^2 \right)^2 - 1.}$

2. a. On trouve via les formules de sommation : $\boxed{\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b.}$

   b. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[-1,1]$.

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x)+f_n(x) &= \cos(2(n+2)A(x))+\cos(2nA(x)) \\ &= \cos(2(n+1)A(x)+2A(x))+\cos(2(n+1)A(x)-2A(x)) \\ &= 2\cos(2(n+1)A(x))\cos(2A(x)) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= 2(1-2x^2)f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

   On en déduit que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[-1,1],\ f_{n+2}(x)+f_n(x)=2(1-2x^2)f_{n+1}(x).}$$

3. Montrons le résultat par récurrence double[1].

   Le résultat est trivial pour $n=0$ et $n=1$: $P_0=1$ et $P_1=1-2X^2$.

   Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un polynôme P_n de degré $2n$ et un polynômes P_{n+1} de degré $2(n+1)$ tels que :

$$\forall x\in[-1,1],\ f_n(x)=P_n(x) \text{ et } f_{n+1}(x)=P_{n+1}(x).$$

   D'après la question précédente,

$$\forall x\in[-1,1],\ f_{n+2}(x)=2(1-2x^2)f_{n+1}(x)-f_n(x)=2(1-2x^2)P_{n+1}(x)-P_n(x).$$

   Le polynôme $P_{n+2}=2(1-2X^2)P_{n+1}-P_n$ est bien de degré $2(n+2)$ et vérifie :

$$\forall x\in[-1,1],\ f_{n+2}(x)=P_n(x) \text{ et } f_{n+1}(x)=P_{n+1}(x),$$

   Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n de degré $2n$ tel que :

$$\boxed{\forall x\in[-1,1],\ f_n(x)=P_n(x).}$$

4. a. La fonction A est dérivable sur $]-1,1[$ et la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f_n est dérivable sur $]-1,1[$ par composition et :

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ f_n'(x)=-\frac{2n\sin(2nA(x))}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

   La fonction A est dérivable sur $]-1,1[$, la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\left(x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ donc f_n' est dérivable sur $]-1,1[$ par composition et :

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ f_n''(x)=-\frac{4n^2\cos(2nA(x))}{1-x^2}-\frac{2nx\sin(2nA(x))}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.}$$

   b. Pour tout $x\in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned} &(x^2-1)f_n''(x)+xf_n'(x)-4n^2f_n(x) \\ &=4n^2\cos(2nA(x))+\frac{2nx\sin(2nA(x))}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2nx\sin(2nA(x))}{\sqrt{1-x^2}}-4n^2\cos(2A(x))=0. \end{aligned}$$

   On en déduit que f_n est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$\boxed{(x^2-1)y''+xy'-4n^2y=0.}$$

Partie IV : étude d'un endomorphisme lié à la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Soit $P\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

   Puisque $\deg P'\leqslant 2n$ et $\deg P''\leqslant 2n-1$, alors $(X^2-1)P''\in\mathbb{R}_{2n+1}[X],\ XP'\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Ainsi :

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{R}_{2n+1}[X],\ (X^2-1)P''+XP'\in\mathbb{R}_{2n+1}[X].}$$

2. a. Puisque $\Phi(1)=0,\ \Phi(X)=X,\ \Phi(X^2)=4X^2-2$, et $\Phi(X^3)=9X^3-6X$, on a :

$$\boxed{M=\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2,X^3)}(\Phi)=\begin{pmatrix}0&0&-2&0\\0&1&0&-6\\0&0&4&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}.}$$

   b. La matrice M étant triangulaire (supérieure), on lit son spectre sur la diagonale ; M admet quatre valeurs propres distinctes : 0, 1, 4 et 9.

   Puisque $M\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, la matrice M est diagonalisable.

   Il vient immédiatement que tous les espaces propres sont de dimension 1 et :

$$\boxed{E_0(M)=\mathrm{Ker}\,M=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) \text{ et } E_1(M)=\mathrm{Ker}(M-I_3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right).}$$

[1] On montre le résultat pour tout $n\in\mathbb{N}$ au lieu de $n\in\mathbb{N}^*$ comme demandé dans l'énoncé, car on remarque que le résultat est encore vrai pour $n=0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_4(M) \Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}(M - 4I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2z = 0 \\ -3y - 6t = 0 \\ 5t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x \\ y = t = 0 \end{cases}.$$

$$X \in E_9(M) \Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}(M - 9I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 2z = 0 \\ -8y - 6t = 0 \\ -5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t = -8y \\ x = z = 0 \end{cases}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{E_4(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_9(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}\right).}$$

3. On a déjà calculé $\Phi(1)$, $\Phi(X)$ et $\Phi(X^2)$. Soit $k \in [\![3, 2n+1]\!]$.

$$\Phi(X^k) = k(k-1)(X^2-1)X^{k-2} + kX^k = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

On en déduit alors la matrice de Φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$:

$$\boxed{A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 4 & \ddots & \ddots & 0 \\ & (0) & & \ddots & \ddots & -2n(2n+1) \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & (2n+1)^2 \end{pmatrix}.}$$

4. La matrice A étant triangulaire supérieure, on peut lire son spectre sur la diagonale :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi) = \mathrm{Sp}(A) = \{k^2,\ k \in [\![0, 2n+1]\!]\}.}$$

La fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, l'endomorphisme Φ admet $2n+2$ valeurs propres distinctes. Puisque c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ qui est de dimension $2n+2$, l'endomorphisme Φ est diagonalisable.

5. Soit $k \in [\![0, 2n+1]\!]$.

D'après la partie III, P_k est solution de l'équation différentielle $(x^2-1)y'' + xy' - 4k^2y = 0$ sur $]-1, 1[$. Ainsi le polynôme $(X^2-1)P_k'' + XP_k' - 4k^2P_k$ admet une infinité de racines (car $]-1, 1[$ est infini). C'est donc le polynôme nul.

On en déduit alors que $\Phi(P_k) = 4k^2P_k = (2k)^2P_k$. Il vient alors que $P_k \in E_{(2k)^2}$.

Remarquons que ϕ admet $2n+2$ valeurs propres distinctes implique que la dimension de chaque espace propre est égale à 1. Puisque $\deg P_k = k$, $P_k \neq 0$ et ainsi :

$$\boxed{E_{(2k)^2} = \mathrm{Vect}(P_k).}$$

* *

*