Exercice 1

1. a. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ par produit de fonctions dérivables (la fonction $\ln$ et la fonction inverse) sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Ainsi :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x < e.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $]e, +\infty[$.

b. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 4. On a donc que $k - 1 \geq 3 > e$.

Par décroissance de f est décroissante sur $[k - 1, k]$ on a :

$$\forall x \in [k - 1, k], f(k) \leq f(x).$$

Par croissance l'intégrale, continuité de f sur $[k - 1, k]$ et $k - 1 < k$, on a :

$$\frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

Puisque f est encore décroissante sur $[k, k + 1]$, on a par un argument analogue que :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k}.$$

Ainsi :

$$\forall k \geq 4, \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.

En sommant les encadrements précédents de 4 à n , on obtient :

$$\sum_{k=4}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \sum_{k=4}^n \frac{\ln(k)}{k} \leq \sum_{k=4}^n \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

En appliquant la relation de Chasles, on trouve :

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \sum_{k=4}^n \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_3^n \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

La fonction $\left(x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{2}\right)$ étant une primitive de f sur $]0, +\infty[$, on trouve que :

$$\forall n \geq 4, \frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$

où $A = \frac{\ln^2(4)}{2}$, $B = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}$ et $C = \frac{\ln^2(3)}{2}$.

d. Pour tout $n \geq 4$, on a :

$$S_n \geq \frac{\ln^2(n+1)}{2} - A + B.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{2} = +\infty$, on en déduit la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

2. a. Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1.$$

On en déduit que $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ puis $\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{\ln^2(n)}$ par élévation au carré.

b. En divisant l'encadrement obtenu à la question 1.c par $\frac{\ln^2(n)}{2}$, on trouve :

$$\forall n \geq 4, \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} - \frac{2A}{\ln^2(n)} + \frac{2B}{\ln^2(n)} \leq \frac{2S_n}{\ln^2(n)} \leq \frac{\ln^2(n)}{\ln^2(n)} - \frac{2C}{\ln^2(n)} + \frac{2B}{\ln^2(n)}.$$

Les membres extérieurs de l'encadrement tendant vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ (d'après la question précédente), le terme central tend aussi vers 1 par encadrement.

Ainsi :

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

3. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} - S_n + \frac{\ln^2(n)}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln^2(n+1) - \ln^2(n)}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Or, d'après la question 1.b, on a (puisque $n+1 \geq 4$), $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx$.

On en déduit que pour tout $n \geq 3$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

b. La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est donc décroissante. Or, d'après la question 1.c :

$$\forall n \geq 4, u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2} \geq \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} + B - A.$$

Par croissance du logarithme, la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est décroissante et minorée (par $B - A$). Elle converge donc en vertu du théorème de la limite monotone.

4. a. On pourrait démontrer le résultat par récurrence. Puisque la somme A_n est alternée, on peut aussi séparer ses termes de rangs pairs et impairs, comme montré ci-dessous. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \sum_{p=1}^n (-1)^{2p-1} \frac{\ln(2p)}{2p} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{\ln(2) + \ln(p)}{p} + S_{2n} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= -\frac{\ln(2)}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \frac{1}{2} S_n + S_{2n} - \sum_{p=1}^n \frac{\ln(2p)}{2p} \\ &= -\frac{\ln(2)}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \frac{1}{2} S_n + S_{2n} - \frac{\ln(2)}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \frac{1}{2} S_n \\ &= S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

b. D'après la question 3.b, on a :

$$u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + o(1)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A_{2n} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{\ln^2(2n)}{2} + \ell + o(1) \right) - \left(\frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1) \right) - \ln(2) (\ln(n) + \gamma + o(1)) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(n)^2 + 2 \ln(2) \ln(n) + \ln(2)^2}{2} - \frac{\ln(n)^2}{2} - \ln(2) \ln(n) - \gamma \ln(2) + o(1) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma \ln(2) + o(1). \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{2n} = \frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma \ln(2).$$

c. Remarquons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = 0$ par croissances comparées et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_{2n+1} = A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}. \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty}$$

On en déduit que la suite $(A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{2n+1} = \frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma \ln(2).$$

d. Les sous-suites $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers la même limite, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma \ln(2)$.

Exercice 2

Partie I

1. a. Il vient immédiatement que $AB_1AB_2 = (AB_1A)B_2 = AB_2$ puis :

$$AB_1AB_2 = (AB_1)(AB_2) = B_1AB_2A = B_1A = AB_1.$$

d'où l'égalité recherchée $AB_1 = AB_2$.

b. L'égalité précédente et la définition assure que $AB_1 = B_1A = AB_2 = B_2A$.

Ainsi :

$$B_1 = B_1(AB_1) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = B_2AB_2 = B_2.$$

2. a. Soit $A = 0_n$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice $B = 0_n$ vérifie :

$$\begin{cases} AB = 0_n = BA \\ ABA = 0_n = A \\ BAB = 0_n = B \end{cases}$$

La matrice nulle est donc pseudo-inversible et de pseudo-inverse elle-même.

b. Soit M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{cases} MM^{-1} = I_n = M^{-1}M \\ MM^{-1}M = MI_n = M \\ M^{-1}MM^{-1} = I_nM^{-1} = M^{-1} \end{cases}$$

Toute matrice inversible M est pseudo-inversible, de pseudo-inverse M^{-1} .

c. (i) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On a alors :

$$N^*N^2 = N^*NN = NN^*N = N.$$

En multipliant cette égalité à droite par N^{k-2} , on trouve $N^*N^k = N^{k-1}$.

(ii) Supposons par l'absurde que $p \geq 2$.

En appliquant la relation précédente pour $k = p$, on aurait $N^{p-1} = 0_n$, ce qui est absurde par définition du degré de nilpotence.

On en déduit que $p = 1$, i.e. $N = 0_n$.

(iii) La matrice N est nilpotente car $N^2 = 0$.

On en déduit que la matrice N n'est pas pseudo-inversible.

d. a. Soit A une matrice diagonale. On note $A = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $d_k^* = 0$ si $d_k = 0$ et $d_k^* = \frac{1}{d_k}$ sinon.

La matrice $B = \text{diag}(d_1^*, \dots, d_n^*)$ vérifie alors :

$$AB = BA = \text{diag}(c_1, \dots, c_n) \quad \text{où } c_k = \begin{cases} 1 & \text{si } d_k \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a de plus $ABA = A$ et $BAB = B$.

La matrice diagonale A est donc bien pseudo-inversible, de pseudo-inverse B .

b. On note $B' = P^{-1}A^*P$. On a alors :

$$A'B' = P^{-1}APP^{-1}A^*P = P^{-1}AA^*P = P^{-1}A^*AP = P^{-1}A^*PP^{-1}AP = B'A'.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A'B'A' &= (P^{-1}AA^*P)(P^{-1}AP) = P^{-1}AA^*AP = P^{-1}AP = A' \\ B'A'B' &= (P^{-1}A^*P)(P^{-1}AA^*P) = P^{-1}A^*AA^*P = P^{-1}A^*P = B'. \end{aligned}$$

La matrice A' est donc pseudo-inversible, de pseudo-inverse $B' = P^{-1}A^*P$.

c. Puisque les matrices diagonales sont pseudo-inversibles et puisque toute matrice semblable à une matrice pseudo-inversible est pseudo-inversible, on en déduit que les matrices diagonalisables sont pseudo-inversibles.

d. (i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 & 2 \\ -1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 - \lambda \\ -1 & 1 - \lambda & 1 \\ 2 - \lambda & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 - \lambda \\ 0 & -\lambda & 4 - \lambda \\ 0 & -\lambda & P(\lambda) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (2 - \lambda)L_1 \end{array} \end{aligned}$$

où $P(\lambda) = 2 - (2 - \lambda)(3 - \lambda) = 2 - (6 - 5\lambda + \lambda^2) = -4 + 5\lambda - \lambda^2$. Ainsi :

$$\text{rg}(A - \lambda I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 - \lambda \\ 0 & -\lambda & 4 - \lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

où $Q(\lambda) = P(\lambda) - (4 - \lambda) = -8 + 6\lambda - \lambda^2 = -(\lambda - 2)(\lambda - 4)$.

Puisque $\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda) \neq 3$, on en déduit que A admet trois valeurs propres : 0, 2 et 4.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_0(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 4z = 0 - 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi : $E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

$$X \in E_2(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi : $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

$$X \in E_4(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi : $E_4(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

- (ii) La matrice A appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.
- (iii) On déduit de la question 3.c que la matrice A est pseudo-inversible.
- (iv) On sait que $A = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la question 3.b, la pseudo-inverse de A est $A^* = PD^*P^{-1}$.
 Déterminons alors P^{-1} . Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ x + y = b \\ y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ y - z = b - a \\ y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a + b - c}{2} \\ y = \frac{-a + b + c}{2} \\ z = \frac{a - b + c}{2} \end{cases}$$

On en déduit que $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Ainsi :

$$A^* = PD^*P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partie II

1. a. Il suffit d'utiliser que a et a^* commutent puis les deux dernières égalités :

$$\begin{cases} a^* \circ a \circ a = (a^* \circ a) \circ a = (a \circ a^*) \circ a = a \\ a \circ a \circ a^* = a \circ (a \circ a^*) = a \circ (a^* \circ a) = a. \end{cases}$$

b. Soit $x \in \text{Ker}(a) \cap \text{Im}(a)$. Alors $a(x) = 0$ et il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = a(y)$.

On en déduit que $a \circ a(y) = a(x) = 0$, donc $a^* \circ a \circ a(y) = 0$.

D'après l'une des égalités montrées à la question précédente $x = a(y) = 0$ On obtient donc bien $\text{Ker}(a) \cap \text{Im}(a) = \{0\}$.

c. Raisonnons par analyse-synthèse.

• **Analyse :**

Soit $z \in \mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe $(x, y) \in \text{Ker}(a) \times \text{Im}(a)$ tel que $z = x + y$.
 Il existe $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = a(\tilde{y})$. Ainsi $z = x + a(\tilde{y})$ et $a(z) = a \circ a(\tilde{y})$. On en déduit alors que :

$$a^* \circ a(z) = a^* \circ a \circ a(\tilde{y}) = a(\tilde{y}) = y,$$

ce qui assure l'unicité de y , et donc de x .

• **Synthèse :**

Soit $z \in \mathbb{R}^n$. On pose $y = a^* \circ a(z)$ et $x = z - y$. D'après les propriétés sur a^* , $y = a \circ a^*(z)$ donc $y \in \text{Im}(a)$. Puisque :

$$a(x) = a(z) - a(y) = a(z) - a \circ a \circ a^*(z) = a(z) - a(z) = 0,$$

il vient que $x \in \text{Ker}(a)$.

On retrouve alors le résultat attendu : pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(x, y) \in \text{Ker}(a) \times \text{Im}(a)$ tel que $z = x + y$.

2. a. Soit $x \in \text{Ker}(a_0)$.

Alors $a_0(x) = 0$, i.e. $a(x) = 0$, et $x \in \text{Im}(a)$. Ainsi $x \in \text{Ker}(a) \cap \text{Im}(a)$. D'après la question 1.b, $x = 0$, donc $\text{Ker}(a_0) = \{0\}$. L'application linéaire a_0 est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est donc un automorphisme de $\text{Im}(a)$.

b. (i) Puisque a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie, le théorème du rang assure que $\dim \text{Ker}(a) + \text{rg}(a) = \dim(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire $s + r = n$.

(ii) Soient $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq s} \in \mathbb{R}^s$ et $(\mu_j)_{1 \leq j \leq r} \in \mathbb{R}^r$ tels que :

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^r \mu_j f_j = 0.$$

En composant par a , on a :

$$\sum_{j=1}^r \mu_j a(f_j) = 0, \text{ i.e. } \sum_{j=1}^r \mu_j a_0(f_j) = 0.$$

Puisque a_0 est un automorphisme de $\text{Im}(a)$ et $(f_1, \dots, f_r)$ une base de $\text{Im}(a)$, la famille $(a_0(f_1), \dots, a_0(f_r))$ est une base de $\text{Im}(a)$ donc libre. On en déduit que, pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \mu_j = 0$, puis, par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_s)$, que pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \lambda_i = 0$.

La famille $(e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_r)$ est donc une famille libre de $s + r = n$ vecteurs dans un espace $\mathbb{R}^n$ - de dimension n . C'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.

(iii) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Puisque $(e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq s} \in \mathbb{R}^s$ et $(\mu_j)_{1 \leq j \leq r} \in \mathbb{R}^r$ tels que :

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^s \lambda_i e_i}_{x_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^r \mu_j f_j}_{x_2}.$$

En notant x_1 et x_2 les deux sommes ci-dessus, on a bien $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \text{Ker}(a)$ et $x_2 \in \text{Im}(a)$.

Supposons qu'il existe $(x'_1, x'_2) \in \text{Ker}(a) \times \text{Im}(a)$ tel que $x = x'_1 + x'_2$. Ainsi $x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2 \in \text{Ker}(a) \cap \text{Im}(a)$, donc $x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2 = 0$.

On en déduit ainsi qu'il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(a) \times \text{Im}(a)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Puisque $x_2 \in \text{Im}(a)$, $(a_0)^{-1}(x_2) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^n$. Il existe $(y_1, y_2) \in \text{Ker}(a) \times \text{Im}(a)$ tel que $y = y_1 + y_2$.

Alors :

$$x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2)$$

où $x_1 + \lambda y_1 \in \text{Ker}(a)$ et $(x_2 + \lambda y_2) \in \text{Im}(a)$. Ainsi :

$$b(x + \lambda y) = (a_0)^{-1}(x_2 + \lambda y_2) = (a_0)^{-1}(x_2) + \lambda (a_0)^{-1}(y_2) = b(x) + \lambda b(y),$$

par linéarité de $(a_0)^{-1}$.

On en déduit que b est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

d. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

On a alors $a \circ b(x) = a \circ (a_0)^{-1}(x_2) = x_2$. De plus, $b \circ a(x) = b \circ a(x_1 + x_2) = b \circ a(x_2)$.

Puisque $a(x_2) \in \text{Im}(a)$, $b(a(x_2)) = (a_0)^{-1}(a(x_2)) = x_2$. Ainsi $a \circ b = b \circ a$.

On en déduit de plus que :

$$a \circ b \circ a(x) = a(b \circ a(x)) = a(x_2) = a(x) \text{ et } b \circ a \circ b(x) = b(a \circ b(x)) = b(x_2) = b(x).$$

Ainsi : $a \circ b \circ a = a$ et $b \circ a \circ b = b$.

e. Notons $B = \text{Mat}(b, \mathcal{B})$ la matrice de B dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

D'après la question précédente, $AB = BA$, $ABA = A$ et $BAB = B$.

La matrice A est donc pseudo-inversible, de pseudo-inverse la matrice B .

3. • Supposons que A est semblable à une matrice de cette forme. En posant

$$B = \begin{pmatrix} (A_0)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

on trouve que A est semblable à une matrice pseudo-inversible, de pseudo inverse B , donc A est pseudo-inversible.

• Supposons que A est pseudo-inversible. Alors l'endomorphisme a canoniquement associé vérifie $\text{Ker}(a) \cap \text{Im}(a) = \{0\}$. D'après ce qui précède, en notant $(e_1, \dots, e_s)$ une base de $\text{Ker}(a)$ et $(f_1, \dots, f_r)$ une base de $\text{Im}(a)$, $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_r, e_1, \dots, e_s)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. La matrice de a dans la base $\mathcal{B}'$ est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où A_0 est une matrice de taille $r = \text{rg}(a)$. La matrice A_0 est inversible car la matrice de l'automorphisme a_0 dans la base $(f_1, \dots, f_r)$ est une base de $\text{Im}(a)$.

* *
*