Exercice 1

1. La matrice A est triangulaire inférieure, on peut donc lire son spectre sur sa diagonale : 0 est la seule valeur propre de A. On vérifie facilement par le calcul que :

$$\boxed{E_0 = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).}$$

2. Après calculs, on trouve :

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.}$$

3. a. On pouvait vérifier que $AM = MA$ par le calcul, ou bien affirmer que A commute avec I_3, A et A^2 donc avec M par linéarité. On en déduit que $M \in \mathcal{S}$.

   b. Après calculs, on trouve :

$$AM = \begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix} \text{ et } MA = \begin{pmatrix}b&c&0\\e&f&0\\h&i&0\end{pmatrix}.$$

   Puisque $M \in \mathcal{S}$, $AM = MA$ et ainsi :

$$\begin{cases} b = c = f = 0 \\ a = e = i \\ d = h \end{cases}.$$

   On en déduit que :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix}a&0&0\\d&a&0\\g&d&a\end{pmatrix} = aI_3 + dA + gA^2.}$$

   c. D'après les questions précédentes, une matrice M appartient à $\mathcal{S}$ si, et seulement si, elle est combinaison linéaire de I_3, A et A^2, *ce qui revient à dire* $\mathcal{S} = \operatorname{Vect}(I_3, A, A^2)$.

4. a. On trouve immédiatement que $M^2 = PA^2P^{-1}$ et $M^3 = PA^3P^{-1} = 0$.
   Il suffit de montrer que $M^2 \neq 0$ pour que $M \in \mathcal{S}'$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $M^2 = 0$. Ainsi PA^2P^{-1}. En multipliant à gauche et à droite par respectivement P^{-1} et P, on trouve que $A^2 = 0$, ce qui est absurde (d'après la question 2). On en déduit donc que $M \in \mathcal{S}'$.

   b. (i) Après calculs, on trouve :

$$M^2 = \begin{pmatrix}2&2&-2\\0&0&0\\2&2&-2\end{pmatrix} \neq 0 \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

   montrant ainsi que $M \in \mathcal{S}'$.

   (ii) Il existe plusieurs manières de le prouver, décrites ci-dessous.
   - On peut exhiber un exemple : si $X = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, M^2X correspond à la première colonne de M^2, qui est non nulle.
   - On peut aussi raisonner sur l'endomorphisme f canoniquement associé : la matrice de f^2 dans la base canonique est M^2. Puisque $M^2 \neq 0$, $f^2 \neq 0$. Il existe donc un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(X) \neq 0$, i.e. $M^2X \neq 0$.

   (iii) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aX + bMX + cM^2X = 0 \quad (\star)$.
   En multipliant cette égalité à gauche par M^2, on obtient $aM^2X = 0$ (car $M^3 = 0$). Puisque $M^2X \neq 0$, on en déduit que $a = 0$.
   En multipliant $(\star)$ à gauche par M, on obtient $bM^2X = 0$. Puisque $M^2X \neq 0$, on en déduit que $b = 0$.
   On déduit de $(\star)$ que $c = 0$. Ainsi la famille (X, MX, M^2X) est libre. Puisqu'elle contient autant de vecteurs que $\dim \mathbb{R}^3$, (X, MX, M^2X) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (iv) Puisque $f(X) = MX$, $f(MX) = M^2X$ et $f(M^2X) = M^3X = 0$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (X, MX, M^2X)$ est :

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} = A.}$$

   (v) D'après la formule de changement de base, on a :

$$\boxed{M = PAP^{-1}.}$$

   où P est la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$, donc une matrice inversible.

   c. (i) On reprend l'une des deux idées de la question 4.b.(ii).
   - M^2 est une matrice non nulle donc admet une colonne non nulle notée C. Il existe un vecteur X de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ tel que $M^2X = C$. Puisque $C \neq 0$, $M^2X \neq 0$.

- On peut aussi raisonner sur l'endomorphisme f canoniquement associé : la matrice de f^2 dans la base canonique est M^2. Puisque $M^2 \neq 0$, $f^2 \neq 0$. Il existe donc un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(X) \neq 0$, i.e. $M^2X \neq 0$.

(ii) On peut montrer de la même manière qu'à la question 4.b.(iii) que la famille $\mathcal{B} = (X, MX, M^2X)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est A (question 4.b.(iv)).
En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$, qui est inversible, on obtient la formule de changement de base : $M = PAP^{-1}$.

d. D'après la question 4.a, toute matrice semblable à A appartient à $\mathcal{S}'$.
Réciproquement, si une matrice M appartient à $\mathcal{S}'$, elle est semblable à la matrice A d'après la question 4.c.
On en déduit donc qu'une matrice M appartient à $\mathcal{S}'$ si, et seulement si, M est semblable à la matrice A.

Exercice 2

I. 1. On sait que X est finie donc admet une espérance et $\boxed{E(X) = \dfrac{n+1}{2}.}$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Pour $n = 1$, $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1 = 1^2$, ce qui assure la propriété au rang 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right).$$

Puisque $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1}{6},$$

ce qui conclut la récurrence. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1}{6}.}$$

3. X est une variable aléatoire finie donc X admet un moment d'ordre 2 (et donc une variance). D'après le théorème du transfert, on a :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

D'après la formule de Köning-Huygens, on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{n^2-1}{12}.}$$

On retrouve que la variance de X est nulle lorsque $n = 1$ puisque X est la variable aléatoire constante égale à 1.

II. 1. On commence par remarquer que $X_1(\Omega) = \{1; 2\}$.
Si $X_1 = 1$, c'est qu'on a tiré une boule noire au premier tirage, ce qui arrive avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ (par équiprobabilité).
On a alors $P(X_1 = 2) = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$, i.e. X suit la loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$.

2. Remarquons que $X_2(\Omega) = \{1; 2; 3\}$. Puisque $([X_1 = i])_{i \in [\![1,2]\!]}$ forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P_{[X_1=2]}(X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + 0\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Par le même raisonnement, on trouve :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2) &= P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)P_{[X_1=2]}(X_2 = 2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 3) &= P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 3) + P(X_1 = 2)P_{[X_1=2]}(X_2 = 3) \\ &= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On en déduit que la variable X_2 suit la loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$.

3. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
L'initialisation est prouvée à la question II.1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que X_n suive la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$ et montrons que X_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![1, n+2]\!]$.
Soit $k \in X_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+2]\!]$. Puisque $([X_n = i])_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i) P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k)$$

Or, par équiprobabilité, on a :

$$P_{[X_1=i]}(X_{n+1} = k) = \begin{cases} \dfrac{n+2-k}{n+2} & \text{si } i = k \\ \dfrac{k-1}{n+2} & \text{si } i = k-1 \text{ et } k \geqslant 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi :

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1) P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2},$$

et, pour tout $k \in [\![2, n+2]\!]$:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= P(X_n = k-1) P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) + P(X_n = k) P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{k-1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2-k}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit que X_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![1, n+2]\!]$, ce qui conclut la récurrence.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

4. La famille $([X_n = i])_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ forme un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i) P_{[X_n=i]}(B_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \frac{i}{n+2} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\boxed{P(B_{n+1}) = \frac{1}{2}.}$

5. a. On commence par remarquer que :

$$Y_n(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \ \middle|\ k \in [\![0, n]\!] \right\}.$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P\left(Y_n = \dfrac{k}{n}\right) = P(X_n = k+1) = \dfrac{1}{n+1}$.
Ainsi Y_n suit la loi uniforme sur $Y_n(\Omega)$.

b. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}}$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $1 \leqslant \lfloor nx+1 \rfloor \leqslant n+1$.

$$\boxed{P(Y_n \leqslant x) = P(X_n \leqslant nx+1) = \sum_{k=1}^{\lfloor nx+1 \rfloor} P(X_n = k) = \frac{1}{n+1} \lfloor nx+1 \rfloor.}$$

d. Soit $x \in [0, 1]$. D'après la question précédente, $F_{Y_n}(x) = \dfrac{\lfloor nx+1 \rfloor}{n+1}$.
Puisque $nx < \lfloor nx+1 \rfloor \leqslant nx+1$, $\dfrac{nx}{n+1} < F_{Y_n}(x) \leqslant \dfrac{nx+1}{n+1}$.
Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{n+1} = x \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{nx+1}{n+1} = x$$

donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = x = F(x)$.
Puisque $Y_n(\Omega) \subset [0, 1]$, $F_{Y_n}(x) = 0 = F(x)$ si $x < 0$ et $F_{Y_n}(x) = 1 = F(x)$ si $x > 1$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = F(x).}$$

III. 1. On a immédiatement $P(B_1) = \dfrac{N_1}{N}$. Puisque $(B_1, \overline{B_1})$ forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_1) P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1}) P_{\overline{B_1}}(B_2) \\ &= \frac{N_1}{N} \times \frac{N_1+1}{N+1} + \frac{N_2}{N} \times \frac{N_1}{N+1} \\ &= \frac{N_1}{N}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{P(B_1) = P(B_2) = \frac{N_1}{N}.}$

a. Remarquons que les valeurs de la variable X_{n-1} sont comprises entre N_1 (si on a tiré aucune boule blanche) et N_1+n-1 (si on a tiré $n-1$ boules blanches). Puisque $([X_n = k])_{1\leqslant k\leqslant N_1+n-1}$ forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1}=k)P_{[X_{n-1}=k]}(B_n)$$

Or $P_{[X_{n-1}=k]}(B_n)$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne qui contient $N+n-1$ boules au total, dont k boules blanches. Ainsi

$$P(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N+n-1}P(X_{n-1}=k),$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{(N+n-1)P(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1}=k).}$$

b. $P_{B_n\cap[X_{n-1}=k]}(B_{n+1})$ est la probabilité de tirer une boule blanche deans une urne contenant au total $N+n$ boules, dont $k+1$ blanches. Ainsi :

$$\boxed{P_{B_n\cap[X_{n-1}=k]}(B_{n+1}) = \frac{k+1}{N+n}.}$$

$P_{\overline{B_n}\cap[X_{n-1}=k]}(B_{n+1})$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant au total $N+n$ boules, dont k blanches. Ainsi :

$$\boxed{P_{\overline{B_n}\cap[X_{n-1}=k]}(B_{n+1}) = \frac{k}{N+n}.}$$

c. Rappelons que $(B_n, \overline{B_n})$ et

$$([X_{n-1}=k])_{N_1\leqslant k\leqslant N_1+n-1}$$

forment des système complet d'événements. En appliquant deux fois la formule des probabilités totales, on trouve :

$$\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n})P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})\\
&= P(B_n)\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1}=k)P_{B_n\cap[X_{n-1}=k]}(B_{n+1})\\
&\quad + P(\overline{B_n})\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1}=k)P_{\overline{B_n}\cap[X_{n-1}=k]}\\
&= P(B_n)\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k+1}{N+n}P(X_{n-1}=k)\\
&\quad + P(\overline{B_n})\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N+n}P(X_{n-1}=k)\\
&= \frac{P(B_n)}{N+n}\left(\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1}=k) + \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1}=k)\right)\\
&\quad + \frac{1-P(B_n)}{N+n}\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1}=k)\\
&= \frac{N+n-1}{N+n}P(B_n) + \frac{1}{N+n}P(B_n)\\
&= \boxed{P(B_n).}
\end{aligned}$$

2. La suite $(P(B_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant constante, $\boxed{P(B_n) = P(B_1) = \frac{N_1}{N}.}$

D'après la question 2.a, on a :

$$\sum_{k=N_1}^{N_1+n} kP(X_n=k) = (N+n)P(B_{n+1}) = (N+n)\frac{N_1}{N}$$

c'est-à-dire $\boxed{E(X_n) = (N+n)\frac{N_1}{N}.}$

On retrouve bien que $E(X_n) = \frac{n+1}{2}$ *dans le cas où* $N_1 = N_2 = 1$*, étudié en II.*

* *
*