

## Rapport Méthodes de calcul et raisonnement 2017

### Exercice :

Cet exercice portait sur le commutant et la classe de similitude d'une matrice de Jordan

1. Question globalement bien traitée. Néanmoins, il y a souvent un manque d'efficacité ; rappelons que les valeurs propres d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) sont les éléments diagonaux de cette matrice.

Il est dommage de perdre du temps à rendre, par opérations élémentaires (pas toujours maîtrisées), la matrice  $A$  triangulaire supérieure.

On constate aussi des confusions entre matrices inversibles et matrices diagonalisables du type "0 est valeur propre donc  $A$  n'est pas diagonalisable".

Enfin on constate aussi des espaces propres qui ne sont pas des espaces vectoriels.

Par exemple, " $E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ " au lieu de  $E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

2. Il s'agissait de simples calculs qui n'ont pas posé de difficultés.
3. (a) Simple vérification.  
(b) L'écrasante majorité des candidats utilise le résultat à prouver au lieu d'utiliser l'hypothèse  $AM = MA$ . Il s'agit d'une grave erreur de logique.  
(c) Très décevant : plus de la moitié des candidats n'a pas donné une réponse correcte à cause d'une confusion entre condition nécessaire, condition suffisante et condition nécessaire et suffisante.

Le jury invite les candidats à s'interroger au cours de leur formation mathématique aux propriétés qui leurs sont proposées et de faire la différence entre condition suffisante (si une matrice carrée de taille  $n \times n$  possède  $n$  valeurs propres, alors elle est diagonalisable) et condition nécessaire et suffisante (une matrice carrée de taille  $n \times n$  est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à  $n$ ).

4. (a) Il était inutile de prouver par récurrence que l'on a  $M^n = PA^nP^{-1}$  pour tout entier  $n$ .

La justification de  $M^2 \neq 0$  est généralement fautive ou absente.

- (b) i. Il suffisait de donner un exemple ; ce qui a été compris par la majorité des candidats.  
ii. Il est toujours intéressant de commencer par préciser que la famille a le bon cardinal (et pas la bonne dimension). La question n'a pas été bien réussie car les étudiants n'ont pas compris qu'il fallait utiliser le vecteur trouvé précédemment.  
iii. Une bonne surprise sur cette question. Les candidats ont majoritairement compris comment déterminer la matrice d'une application linéaire dans une base.  
iv. Seul un candidat sur deux remarque qu'il ne s'agit que d'une formule de changement de base.
5. (a) L'argument  $M^2 \neq 0$  nécessitait d'être approfondi pour justifier l'existence du vecteur demandé.  
(b) Cette question qui nécessitait de l'abstraction n'a été traitée que dans les meilleures copies. Certains qui avaient réussi le cas particulier avec des arguments qui auraient pu être généralisés, n'ont pas su les réutiliser dans le cas général.
6. Question qui a été traitée par les étudiants qui ont su admettre les questions précédentes et prendre un peu de recul.

**Problème :**

Un investissement en temps pour bien comprendre l'énoncé était indispensable pour traiter correctement ce problème qui portait sur les urnes de Polya.

**I. Préliminaires :**

1. Il s'agit d'une question de cours très simple mais réussie par seulement 85% des élèves.
2. Il s'agissait d'une récurrence assez simple. Il est indispensable de soigner la rédaction d'une telle question de début de problème.
3. Le résultat étant hors-programme, une démonstration était attendue. Les erreurs sur les fractions et les tentatives d'arnaques sont très peu appréciées.

**II. Étude d'un cas particulier :**

1. Question simple même si certains n'ont pas compris le principe de "cas particulier".
2. Le résultat étant donné à la question suivante, on attendait une preuve et non une simple affirmation.
3. Cette question n'a été traitée correctement que par les meilleurs étudiants.  
 Environ 40% des candidats a bien compris que l'événement  $X_{n+1} = k$  ne peut provenir que seulement de  $X_n = k$  ou  $X_n = k - 1$ .  
 Les probabilités conditionnelles  $P(X_{n+1} = k | X_n = k)$  et  $P(X_{n+1} = k | X_n = k - 1)$  ne sont pas souvent justes car la composition de l'urne à l'issue de  $n$  expériences est fautive. Néanmoins, certains étudiants forcent le destin et obtiennent miraculeusement le résultat attendu. Un tel manque d'honnêteté intellectuelle est sévèrement sanctionné.  
 Les meilleurs candidats ont été capables de déceler les cas particuliers  $X_{n+1} = 1$  et  $X_{n+1} = n + 2$ .
4. Question mal réussie. Le calcul des probabilités conditionnelles nécessitait d'avoir compris que la composition de l'urne à l'issue de  $n$  expériences dépendait de la valeur prise par  $X_n$  mais que le nombre total de boules dans l'urne était égal à  $n + 2$ .
5. (a) Question très mal traitée. Il s'agissait d'une loi uniforme sur un ensemble fini mais la détermination de cet ensemble,  $Y(\Omega) = \{\frac{k}{n}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ , a posé problème aux étudiants, peut-être parce qu'il ne s'agissait pas d'une partie de  $\mathbb{N}$ .  
 (b) Il s'agit d'une question de cours. Néanmoins les cas  $x < 0$  et  $x > 1$  ne sont pas toujours bien traités.  
 (c) Le résultat étant donné, il est obtenu mais les justifications sont rarement présentes alors qu'il s'agit de ce qui est évalué dans un tel cas. Il fallait notamment préciser que  $X_n$  était à valeurs entières.  
 (d) L'encadrement de la partie entière n'est pas maîtrisé. Un théorème d'encadrement suffisait ensuite à conclure. Les cas "simples" ont été généralement oubliés.

**III. Retour au cas général :**

1. La notion de "cas général" n'est pas toujours comprise. La simplification des fractions obtenues est appréciée et valorisée.
2. (a) Il s'agissait de la formule des probabilités totales mais cela a été peu vu par les étudiants.  
 (b) Cette question a été correctement traitée par les étudiants qui avaient pris le temps de comprendre l'expérience.  
 (c) Il s'agissait d'une question de fin de problème très technique. Elle a été traitée par quelques excellents candidats.
3. Cette question pouvait être traitée en admettant les résultats précédent. Une telle démarche est appréciée.