Banque «Agro-Véto»
A - 0417

MATHÉMATIQUES

Méthodes de calcul et raisonnement
Durée : 2 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et, éventuellement, remplacera le sujet.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice A.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^2 et A^3.
3. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
   (a) Soit α, β et γ trois réels et $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}$.
   (b) Réciproquement, considérons a, b, c, d, e, f, g, h et i des réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Déterminer, en fonction des coefficients de M, trois réels α, β et γ tels que $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$.
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathcal{S}$.
4. On considère $\mathcal{S}'$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.
   (a) Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $M = PAP^{-1}$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.

   Dans la suite, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera assimilé à une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de sorte que, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, le produit matriciel MX soit correctement défini.

   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
      i. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.

      On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique, c'est-à-dire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X \mapsto MX$.

      ii. Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.

iii. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(X, MX, M^2X\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

iv. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

v. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.

(c) On cherche à généraliser ce qui a été montré dans la question précédente. Pour cela on considère $M \in \mathcal{S}'$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.

i. Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.

ii. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.

(d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathcal{S}'$.

Problème :

I. Préliminaires :

Soit n un entier non nul et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\} = [\![1, n]\!]$.

1. Donner, sans justifications, l'espérance de X.
2. Prouver par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. En déduire la variance de X.

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher.
On pose $N = N_1 + N_2$.
On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne et l'on replace dedans deux boules de la couleur obtenue.
À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N+1$ boules et l'on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N+2$ boules et l'on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.
Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k-ième expérience.
Pour tout k non nul, on note B_k l'évènement "la boule tirée lors de la k-ième expérience est blanche".

II. Étude d'un cas particulier :

On suppose ici que $N_1 = N_2 = 1$

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.
   On pourra faire une récurrence et utiliser le système complet $((X_n = k))_{1 \leq k \leq n+1}$ *pour déterminer la loi de* X_{n+1}.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de B_{n+1}.
   On pourra utiliser la question précédente et la formule des probabilités totales

5. Pour tout entier n non nul, on considère la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{X_n - 1}{n}\cdot$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de Y_n.

   (b) On considère F la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1]$. Rappeler, pour tout réel x, la valeur de $F(x)$.

   (c) Soit $x \in [0,1]$.

   Prouver que, pour tout entier n, on a $P\left(Y_n \leq x\right) = \dfrac{1}{n+1}\lfloor nx+1 \rfloor$, où l'on note $\lfloor . \rfloor$ la partie entière.

   (d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n. Déduire de ce qui précède, que pour tout réel x, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = F(x)$.

III. Retour au cas général :

1. Déterminer la probabilité des évènements B_1 et B_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k\, P(X_{n-1} = k) = (N+n-1)P(B_n)$.

   (b) Soit $k \in [\![N_1, N_1+n-1]\!]$.
   Déterminez la probabilité de B_{n+1} sachant $B_n \cap (X_{n-1} = k)$ puis la probabilité de B_{n+1} sachant $\overline{B_n} \cap (X_{n-1} = k)$

   (c) En déduire que $P(B_{n+1}) = P(B_n)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente la probabilité de B_n et l'espérance de X_n.