Banque «Agro-Véto»
A - 0419

MATHÉMATIQUES

Méthodes de calcul et raisonnement
Durée : 2 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et, éventuellement, remplacera le sujet.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice :

On considère l'expérience suivante : on effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. On suppose les lancers indépendants.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on notera F_n l'évènement "au n-ème lancer on obtient un face"
On considère la variable aléatoire T égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier face.

1. Donner la loi de T, son espérance et sa variance.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculez $P(T > n)$.
3. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Comparer $P(T > n + m \mid T > n)$ et $P(T > m)$ et donner une interprétation.

On considère la variable aléatoire S égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier double face, c'est-à-dire deux faces consécutifs. On a donc $S \geq 2$ et S est égale à 3 si et seulement si on a obtenu un pile suivi de deux faces aux trois premiers lancers.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = P(S = n)$ et $q_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k$.

4. Déterminer p_1, p_2, p_3 et p_4 puis q_1, q_2, q_3 et q_4.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la probabilité de l'événement "$S > n$" en fonction de q_n.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \in [0, 1]$ puis que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $p_{n+3} = q_n/8$ puis que $q_{n+3} = q_{n+2} - q_n/8$.
8. En déduire la limite de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et en donner une interprétation.

   On dit que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 3. Dans notre cas, on peut se ramener à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

9. Démontrer que pour tout entier n non nul, on a $q_{n+2} = \dfrac{q_{n+1}}{2} + \dfrac{q_n}{4}$.

10. Déterminer les racines du polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$.
    On les notera r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$.
11. Justifier qu'il existe des réels A et B tels que :

$$\begin{cases} A r_1 + B r_2 & = & q_1 \\ A r_1^2 + B r_2^2 & = & q_2 \end{cases}$$

12. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $q_n = Ar_1^n + Br_2^n$.
13. Donner un équivalent de q_n quand n tend vers $+\infty$.
    Cet équivalent pourra faire intervenir A, B, r_1, r_2 et n.

Toutes les suites récurrentes linéaires d'ordre 3 ne se traitent pas aussi facilement. On se propose d'en étudier deux exemples dans le problème qui suit.

Problème :

Pour toute matrice M, on notera ${}^tM$ sa transposée.

Dans toute la suite, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera assimilé à une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de sorte que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, le produit matriciel AX soit correctement défini.

On considérera le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$. Ainsi, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, alors leur produit scalaire est égal à $(X|Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Comme le produit matriciel ${}^tX\,Y$ est égal à la matrice de taille 1×1,

$$\begin{pmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \end{pmatrix},$$

on identifiera matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et réel, en notant $(X|Y) = {}^tX\,Y$.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est **stable** par la matrice A si :

$$\forall X \in F, \quad AX \in F.$$

On rappelle que l'on appelle droite vectorielle tout espace vectoriel de dimension 1 et plan vectoriel tout espace vectoriel de dimension 2.

On pourra admettre les résultats des parties I et IV et les utiliser dans la partie V

I. Contexte

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère une suite u telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

1. Montrer que, pour tout entier n, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Par convention $A^0 = I_3$.

II. Premier exemple

On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Prouver que la matrice A est diagonalisable.
   On pourra remarquer que le polynôme $X^3 - 2X^2 - X + 2$ possède 1 comme racine et le factoriser par $X - 1$.
3. Prouver qu'il existe trois matrices R_1, R_2 et R_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que pour tout entier n, on ait $A^n = R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3$.
   On ne demande pas de calculer explicitement ces matrices.
4. Soit u une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

   Prouver qu'il existe des constantes α, β et γ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma(-1)^n.$$

   On ne demande pas d'expliciter les constantes α, β et γ.

III. Second exemple

On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. La matrice A est-elle diagonalisable ? *La réponse sera justifiée.*
6. On pose $U = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la droite vectorielle D engendrée par le vecteur U est stable par A.
7. On pose $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Prouver que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs V et AV est un plan vectoriel. On le notera P.
   (b) Prouver que le vecteur A^2V appartient au plan P.
   (c) En déduire que le plan P est stable par la matrice A.

IV. Résultats sur les droites et plans stables par une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ quelconque.

8. Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dirigée par un vecteur U non nul.
   Prouver que la droite D est stable par la matrice A si, et seulement si, U est un vecteur propre de la matrice A.
9. Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On considère une base (X_1, X_2) de P et X_3 un vecteur non nul normal à P.
   (a) Prouver que le plan P est stable par la matrice A si, et seulement si, les vecteurs AX_1 et AX_2 appartiennent à P.
   (b) Montrer que le vecteur AX_1 appartient au plan P si, et seulement si, les vecteurs X_1 et ${}^tA\, X_3$ sont orthogonaux.
   On utilisera la notation matricielle du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$ donnée en préambule $(X|Y) = {}^tX\,Y$.
   (c) En déduire que le plan P est stable par la matrice A si, et seulement si, le vecteur X_3 est un vecteur propre de la matrice ${}^tA$.

V. Fin du second exemple

On suppose de nouveau dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Déterminer les droites vectorielles stables par la matrice A.
11. On admet que les valeurs propres de ${}^tA$ sont 1 et 2.
    Déterminer les équations des plans vectoriels stables par la matrice A.
12. En déduire une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :
    – le vecteur e_1 soit un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 2,
    – la droite engendrée par le vecteur e_2 soit stable par la matrice A,
    – le plan P engendré par les vecteurs e_2 et e_3 soit stable par la matrice A.
13. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.
    (a) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
    (b) En déduire que la matrice A est semblable à une matrice de la forme
    $$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \delta \in \mathbb{R}.$$
    (c) Déterminer B^n pour tout entier naturel n.
14. En déduire que si une suite u vérifie :
    $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n,$$
    alors il existe des constantes α, β et γ telles que :
    $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma n.$$
    On ne demande pas d'expliciter les constantes α, β et γ.