CONCOURS ABCPST - SESSION 2019

ADMISSIBILITÉ

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

L'objectif de ce rapport n'est pas d'accabler les candidats en énumérant les erreurs qu'ils ont pu commettre mais de pointer certaines lacunes récurrentes afin d'aider les futurs candidats dans leur préparation.
De façon générale, la présentation des copies est à améliorer. Les candidats pourraient augmenter sensiblement leurs résultats en justifiant leurs calculs (évènements incompatibles, indépendants,...)

Exercice :

Il s'agissait d'un exercice sur le temps d'apparition d'un face (qui était l'occasion de questions classiques sur la loi géométrique) puis d'un double face qui conduisait à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre trois que l'on ramenait à une suite récurrente linéaire d'ordre deux dont on obtenait la forme.

1. La loi de T a souvent été obtenue mais comme il était indiquer de "donner" la loi, il a rarement été justifié que l'indépendance des lancers était nécessaire.

   Parfois l'espérance et la variance ont été données en fonction de la probabilité p sans la remplacer par sa valeur numérique.

   Quelques candidats ont essayé de redémontrer les expression de $E(T)$ et $V(T)$, ce qui étaient inutile (il s'agit d'un résultat de cours), chronophage et souvent infructueux.
2. Le résultat est souvent juste mais rarement justifié. On pouvait sommer les probabilités des évènement **disjoints** "$T = k$", avec $k > n$ ou calculer la probabilité du complémentaire qui était l'intersection des événements **indépendants** $\overline{F_k}$ avec $k \leq n$.
3. Le résultat découle de la question précédente. L'invariance temporelle de la loi géométrique est connue mais certains l'utilisent pour obtenir le résultat.
4. À l'exception de p_4, les calculs sont souvent justes mais trop peu justifiés (indépendance des lancers, incompatibilité des évènements).
5. Question simple et bien traitée.
6. Le théorème sur les suites monotones est globalement connu.

   Signalons qu'une suite bornée n'est pas nécessairement convergente (on peut considérer $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$).

   On ne pouvait pas utiliser ici l'argument $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} p_k = 1$ car, à ce stade, on ne sait pas que S est finie presque surement.

7. Très peu de candidats ont su justifier la première égalité. Certains tentent de tromper le correcteur avec une récurrence, ce type de tentative est à proscrire.

   Néanmoins les étudiants ont su rebondir et en déduire la seconde égalité. Il serait agréable pour les correcteurs qu'il soit clairement écrit que la première égalité est admise.

8. Le passage à la limite n'a pas posé de difficulté mais le vocabulaire probabiliste "quasi impossible" ou "quasi certain" n'est que trop peu vu.

9. La plupart des candidats fait un raisonnement par récurrence (encore quelques tentatives d'arnaque dans l'hérédité) mais il est rarement abouti.

   Un raisonnement probabiliste particulièrement élégant a été réussi dans quelques très rares cas.

10. Question réussie par 80% des candidats, ce qui est peu vu sa facilité. On a souvent vu des fractions non simplifiées ou mal simplifiées. Par exemple $\dfrac{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}{2} = 1+\sqrt{5}$!

11. La question portait sur l'existence de A et de B... Beaucoup se sont lancés dans une résolution fastidieuse, infructueuse et non justifiée. Il fallait utiliser que r_1 et r_2 étaient non nulles et distinctes.

    Plus généralement, avant de diviser par une quantité, il faut s'assurer qu'elle est non nulle.

    Très peu ont pensé à calculer le déterminant de la matrice associée au système, alors que cela permettait de conclure rapidement.

    L'attendu du programme sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux se limite à la maitrise d'une méthode de calcul du n-ième terme de la suite. Néanmoins les étudiants ayant utilisé un résultat de cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux pour obtenir l'existence de A et B ont été valorisés pour peu qu'ils citent les hypothèses (deux racines réelles distinctes).

12. Cette question a déstabilisé les candidats.

    Le résultat de cours sur la forme d'une suite récurrente linaire d'ordre 2 est généralement bien connu, mais peu ont pensé à vérifier qu'il s'agissait des réels A et B de la question précédente.

    L'ordre des quantificateurs n'est pas toujours correct pour donner l'expression du terme général de la suite.

    Ceux qui ont cherché à prouver le résultat par récurrence n'ont pas réussi. Il s'agissait d'une récurrence double et il fallait utiliser que r_1 et r_2 étaient racines de $X^2-\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}$.

13. Très peu d'équivalents corrects et encore moins de justifications.

Problème :

Ce problème portait sur les droites et les plans stables par une matrices et leurs utilisation pour trouver la forme de suites récurrentes linéaires d'ordre trois.

I. Contexte

1. Cette question très classique avait pour but de tester la rédaction d'une récurrence. Cette compétence est globalement acquise.

II. Premier exemple

2. Pour obtenir les valeurs propres, les étudiants calculent le rang de $(A-\lambda I_3)$ pour cela il faut prendre soin de ne faire que des opération élémentaires. Si l'on souhaite, par

exemple, faire l'opération $L_1 \leftarrow \lambda L_1 + L_2$ il faut faire une disjonction de cas suivant la nullité de λ. Il est donc préférable de privilégier les opération du type $L_i \leftarrow L_i + tL_j$ avec $j \neq i$.

La factorisation est bien réalisée. Les étudiants font systématiquement une identification en posant un système, il est possible de gagner en rapidité.

La matrice était d'ordre ou de taille 3 et possédait 3 valeurs propres distinctes, il était donc inutile (et long) de déterminer les sous-espaces propres pour prouver que A était diagonalisable.

Attention à ne pas écrire qu'il y 3 valeurs propres et que A est de rang ou de dimension 3.

Certaines copies très faibles affirment que A est diagonalisable car inversible. Ces deux notions ne sont pas liées.

3. Le lien avec $A^n = PD^nP^{-1}$ a souvent été vu mais l'obtention des matrices R_i est rare.

   Précisons que la relation $A^n = PD^nP^{-1}$ est à prouver soit par récurrence soit par changement de bases.

4. Le lien avec la question précédente et la première question du problème est souvent fait mais il faut ensuite s'intéresser à la dernière coordonnée des vecteurs $R_i \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$

III. Second exemple

5. On retrouve les mêmes problèmes qu'à la question 2. Il n'y avait cette fois pas d'indication, il fallait donc trouver seul une racine évidente et factoriser. Comme la matrice n'avait que deux valeurs propres, la détermination des sous-espaces propres (ou au moins de leurs dimension) était nécessaire.

   Les erreurs de calcul peuvent être facilement repérées par les étudiants eux-mêmes (si $X \in E_\lambda(A)$, alors AX doit valoir λX).

6. La majorité des candidats ont obtenu $AU = 2U$ puis ont affirmé que D était stable par A.

   Il fallait considérer un élément X de D, dire qu'il était de la forme $X = tU$ avec $t \in \mathbb{R}$ et en déduire que AX appartenait encore à D.

7. (a) Question bien réussie. Il s'agissait de calculer AV et de préciser que les vecteurs V et AV n'étaient pas colinéaires.

   (b) Question bien réussie. Il n'est pas nécessaire de calculer A^2 pour calculer A^2V, il suffit de calculer $A(AV)$.

   Quelques étudiants se sont trompés sur le calcul de A^2V mais ont quand même obtenu une décomposition... il est préférable de constater que l'on arrive pas à obtenir $A^2V = \alpha V + \beta AV$ et que l'on a certainement fait une erreur de calcul (voire de la chercher et la corriger) plutôt que de tenter de tromper le correcteur.

   (c) Comme à la question 6, les étudiants se limitent à prouver que AV et $A(AV)$ appartiennent à P au lieu de le prouver pour tous les vecteurs de P.

   Il fallait là encore considérer un vecteur X de P, dire qu'il était de la forme $X = \alpha V + \beta AV$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et en déduire que AX appartenait encore à P.

IV. Résultats sur les droites et plans stables par une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

8. On observe de grandes difficultés dans la rédaction d'une équivalence et les mêmes problèmes qu'à la question 6.

   Rappelons que pour prouver $(A) \Leftrightarrow (B)$ par double implications, on rédige ainsi :
   – Supposons (A). On a alors .... et donc (B).

– Supposons (B). On a alors .... et donc (A).

9. (a) Il s'agissait encore de rédiger une équivalence. Peu de candidats voient que le sens direct est immédiat vu que X_1 et X_2 sont appartiennent à P.

   L'autre sens a soulevé les mêmes difficultés que la question 7.

   (b) Ici, on pouvait raisonner par équivalences directement. Il fallait utiliser qu'un vecteur appartenait au plan P si, et seulement s'il était orthogonal au vecteur normal X_3 et le fait que ${}^t(AX_1) = {}^tX_1\,{}^tA$.

   (c) Question de synthèse très rarement correctement traitée.

V. Fin du second exemple

10. Le lien avec les questions précédentes est fait par les bonnes copies. Il faut être rigoureux dans la conclusion : il n'y a que deux droites stables par A, celle engendrée par $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et celle engendrée par $U_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. Certains ont cherché (avec plus ou moins de succès) les sous-espaces propres de ${}^tA$ sans savoir quoi en faire...

    Il faut savoir trouver l'équation d'un plan **vectoriel** à l'aide d'un vecteur normal.

12. Les vecteurs e_1 et e_2 sont parfois trouvés.

13. (a) Il était possible d'obtenir les deux premières colonnes grâce à la définition des vecteurs e_1 et e_2. Cette démarche a été valorisée.

    (b) Question peu traitée alors qu'il suffisait de dire que cela découlait de la formule de changement de bases.

    (c) On pouvait obtenir le résultat par récurrence ou en utilisant la formule du binôme de Newton mais dans ce cas, il fallait justifier que les deux matrices commutaient.

14. Question de synthèse qui n'a été traitée que dans une copie.