

Partie 1 : Équation de transport uni-dimensionnelle

1. 1.1 Il suffit d'appliquer la formule de dérivation de composées de fonctions dérivables :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} : (t, x) \mapsto -cu'_0(x - ct)} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} : (t, x) \mapsto u'_0(x - ct)}$$

- 1.2 Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = -cu'_0(x - ct) + cu'_0(x - ct) = 0.$$

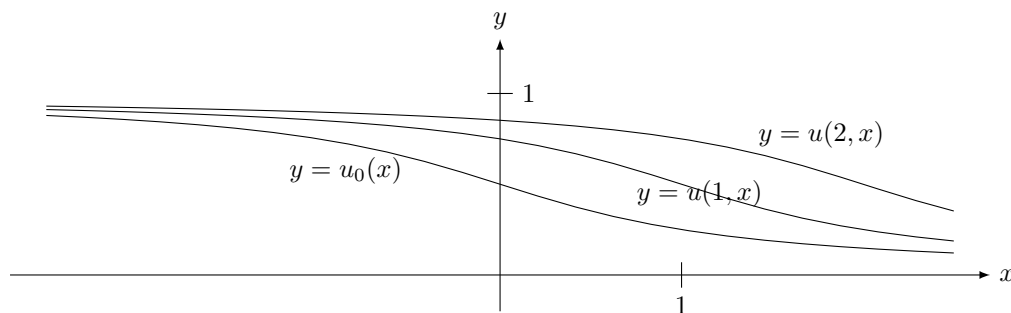
La fonction u est donc solution de (1).

2. En évaluant en $t = 0$, on trouve :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, u(0, x) = u_0(x)}.$$

On donne le nom de “condition initiale” à la fonction u_0 , car, la fonction u , solution de (1), coïncide avec la fonction u_0 à l'instant $t = 0$.

3. On représente ci-dessous les fonctions u_0 , $(x \mapsto u(1, x))$ et $(x \mapsto u(2, x))$:



Remarquons que les deux dernières courbes sont images par des translations horizontales de la courbe de la fonction u_0 , justifiant ainsi du nom d'équation de transport.

4.

5. L'hypothèse $c \in \mathbb{R}^+$ signifie que le fluide s'écoule dans le sens des x positifs.

6. La fonction x_{x_0} est de dérivée constante égale à c , il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, x_{x_0}(t) = ct + a.$$

Puisque $x_{x_0}(0) = x_0$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, x_{x_0}(t) = ct + x_0}.$$

Par le même raisonnement on trouve :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, x_{x_0+h}(t) = ct + x_0 + h}.$$

7. 7.1 Soit $t \in \mathbb{R}^+$. D'après la question précédente, l'intervalle $[x_0 + ct, x_0 + h + ct]$ correspond à la plage d'abscisses où se trouve, à l'instant t , la section de fluide qui se trouvait entre l'abscisse x_0 et $x_0 + h$ à l'instant 0.

Puisque $u(t, s)$ désigne l'aire de section de l'artère à l'instant t située à l'abscisse s .

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la quantité $V(t)$ correspond au volume, à l'instant t , du fluide considéré à l'instant 0 entre les abscisses x_0 et $x_0 + h$.

- 7.2 Soit $t \in \mathbb{R}^+$. La fonction $(t \mapsto s - ct)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit par le changement de variables $x = s - ct$ que :

$$V(t) = \int_{x_0+ct}^{x_0+h+ct} u(t, s) ds = \int_{x_0}^{x_0+h} u(t, x + ct) dx.$$

On trouve bien le résultat attendu :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, V(t) = \int_{x_0}^{x_0+h} u(t, s + ct) ds}.$$

- 7.3 On considère la fonction $f : (t, s) \mapsto u(t, s + ct)$.

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et d'après la règle 1.a, on a :

$$\begin{aligned} \forall (t, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, s + ct) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, s + ct) \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (t, s + ct). \end{aligned}$$

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer la règle 2. Ainsi, V est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, V'(t) = \int_{x_0}^{x_0+h} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (t, s + ct) ds}.$$

8. 8.1 Si, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on suppose $V'(t) = 0$, c'est qu'on suppose la variation de volume du fluide nulle au cours du temps, c'est-à-dire qu'on suppose le fluide incompressible.
8.2 Le résultat est immédiat d'après la question 7.3.

9. 9.1 Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$.

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} G(x_0 + h) &= \int_0^{x_0+h} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (t, s + ct) \, ds \\ &= \int_0^{x_0} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (t, s + ct) \, ds + \int_{x_0}^{x_0+h} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (t, s + ct) \, ds \\ &= G(x_0) \quad (\text{par hypothèse d'incompressibilité du fluide}). \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall h > 0, G(x_0 + h) = G(x_0).}$$

9.2 On aurait pu remarquer que la fonction G est constante, mais il semble que l'esprit du sujet était plutôt de considérer un taux d'accroissement. Pour cela, on remarque que la propriété précédente est valable pour tout réel $h \neq 0$ (et non seulement pour $h > 0$). Ainsi :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^*, \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} = 0.$$

Le taux d'accroissement de G entre x_0 et $x_0 + h$ est nul. La fonction G est donc dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\forall x_0 \in \mathbb{R}, G'(x_0) = 0.}$$

10. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. La fonction G est une primitive de la fonction :

$$x \mapsto \left[\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (t, x + ct)$$

Puisque la fonction G est constante sur $\mathbb{R}$ (d'après la question précédente), on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left[\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (t, x + ct) = 0.$$

Puisque la fonction $(x \mapsto x + ct)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on trouve par translation :

$$\boxed{\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0.}$$

Partie 2 : Simulation numérique de l'équation de transport

1.1. Il suffit de définir la fonction indicatrice par morceaux :

```
def Uzero(x):
    if x <= 1:
        return 1
    else:
        return 0
```

1.2. On initialise le maximum actuel en lisant le premier coefficient de la ligne i , puis dès qu'on lit une valeur supérieure en valeur absolue au maximum des valeurs parcourues, on met-à-jour ce maximum.

```
def MaxiLigne(M, i):
    n, p = np.shape(M)
    max_actuel = abs(M[i, 0])
    for j in range(1, p):
        if abs(M[i, j]) > max_actuel:
            max_actuel = abs(M[i, j])
    return max_actuel
```

2.1.1. Les lignes 4 à 7 initialisent la matrice en respectant les formules (4) et (5).

2.1.2. La relation de récurrence (6) permet d'écrire $u_{i+1,j}$ en fonction de $u_{i,j}$ et $u_{i,j-1}$ pour tous $i \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, N_x + 1 \rrbracket$.

```
def Amont(T, L, Nt, Nx):
    k = T/Nt; h = L/Nx
    U = np.zeros((Nt+1, Nx+1))
    for j in range(0, Nx+1):
        U[0, j] = Uzeros(j*k)
    for i in range(0, Nt+1):
        U[i, 0] = 1
    for i in range(Nt):
        for j in range(1, Nx+1):
            U[i+1, j] = U[i, j] - k/h*(U[i, j] - U[i, j-1])
    return U # les parenthèses étaient superflues !
```

2.2.1 (a) Vrai : la variable booléenne **b** change de valeur (et prend la valeur **False**) si et seulement s'il existe $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $C[i] > C[0]$.

On obtient le résultat par négation.

(b) Faux : la variable **b** ne prend que des valeurs booléennes.

(c) Vrai : $V[0] > V[0]$ est toujours de valeur **False**.

2.2.2 **Stable(U)** prend pour valeur **True** si, et seulement si, la norme de la ligne 0 de U est la plus grande des normes des lignes de U , i.e. si, et seulement si, pour tout j , le maximum des $|u_{i,j}|$ est atteint pour $i = 0$.

3.1 La courbe A_2 est la représentation de la fonction indicatrice de l'intervalle $[1, +\infty[$, c'est-à-dire de la fonction $u_0 : x \mapsto u_0(x - t_0)$, où $t_0 = 0$.

La courbe A_1 est la représentation de la fonction indicatrice de l'intervalle $[2, +\infty[$, c'est-à-dire de la fonction $(x \mapsto u_0(x - t_1))$, où $t_1 = 1$.

La courbe A_3 est la représentation de la fonction indicatrice de l'intervalle $[3, +\infty[$, c'est-à-dire de la fonction $(x \mapsto u_0(x - t_2))$, où $t_2 = 2$.

3.2 En admettant la convergence du modèle (ce aurait dû être précisé dans la question !), on s'attend à ce que le tracé soit plus précis lorsque le nombre de points de discrétisation augmente. Ainsi la courbe B_1 en pointillés correspond à la solution discrète pour $N_x^{(2)}$ car ressemblant plus à une fonction créneau.

Partie 3 : Ondes progressives pour un modèle de dynamique de population

1.1 Soit $i \in \mathbb{Z}$.

Si la particule se trouve à l'abscisse x_i à l'instant τ , alors elle se trouvait à l'abscisse x_{i-1} ou x_{i+1} à l'instant précédent, i.e. à l'instant 0.

Ainsi :

$$A(\tau, i) \subset (A(\tau, i) \cap A(0, i - 1)) \cup (A(\tau, i) \cap A(0, i + 1)).$$

L'inclusion réciproque étant triviale, on a l'égalité demandée :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, A(\tau, i) = (A(\tau, i) \cap A(0, i - 1)) \cup (A(\tau, i) \cap A(0, i + 1)).$$

1.2 Soient $i \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Par un raisonnement analogue, en se plaçant aux instants $n\tau$ et $(n + 1)\tau$, on peut montrer que :

$$A((n + 1)\tau, i) = (A((n + 1)\tau, i) \cap A(n\tau, i - 1)) \cup (A((n + 1)\tau, i) \cap A(n\tau, i + 1)).$$

Les événements $A((n + 1)\tau, i) \cap A(n\tau, i - 1)$ et $A((n + 1)\tau, i) \cap A(n\tau, i + 1)$ étant disjoints, on a :

$$\begin{aligned} P((n + 1)\tau, i) &= P(A((n + 1)\tau, i)) \\ &= P(A((n + 1)\tau, i) \cap A(n\tau, i - 1)) + P(A((n + 1)\tau, i) \cap A(n\tau, i + 1)) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} P(A((n + 1)\tau, i) \cap A(n\tau, i - 1)) &= P(n\tau, i - 1)P_{A(n\tau, i - 1)}(A((n + 1)\tau, i)) \\ &= pP(n\tau, i - 1) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P(A((n + 1)\tau, i) \cap A(n\tau, i + 1)) &= P(n\tau, i + 1)P_{A(n\tau, i + 1)}(A((n + 1)\tau, i)) \\ &= qP(n\tau, i + 1) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, P((n + 1)\tau, i) = pP(n\tau, i - 1) + qP(n\tau, i + 1).$$

1.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. La variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$ ne prend que deux valeurs : $-h$ et h . Elle admet donc une espérance.

$$E(X_{n+1} - X_n) = -hP(X_{n+1} - X_n = -h) + hP(X_{n+1} - X_n = h) = (p - q)h.$$

1.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est nécessairement une variable aléatoire finie : la particule ne peut se trouver qu'entre les abscisses $x_0 - nh$ et $x_0 + nh$. Elle admet donc une espérance.

Par linéarité, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}) = E(X_n) + (p - q)h.$$

La suite $(E(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $(p - q)h$. Ainsi, puisque $E(X_0) = x_0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(X_n) = x_0 + n(p - q)h.$$

La position moyenne de la particule après un temps $n\tau$ est $x_0 + n(p - q)h$.

1.5 Par linéarité, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(Y_n) = \frac{x_0}{n\tau} + \frac{(p - q)h}{\tau}.$$

Puisque :

$$E\left(\frac{X_n - x_0}{n\tau}\right) = E(Y_n) - \frac{x_0}{n\tau} = \frac{(p - q)h}{\tau},$$

$\frac{(p - q)h}{\tau}$ est la vitesse moyenne de la particule sur entre les instants $t = 0$ et $t = n\tau$.

2. La marche est sans biais puisque la particule a la même probabilité de se déplacer vers la gauche ou vers la droite.
3. La fonction $f : t \mapsto P(t, x)$ est $\mathcal{C}^\infty$, elle admet donc un développement limité à l'ordre 1 en t , d'après la formule de Taylor-Young :

$$f(t + \tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{=} f(t) + \tau f'(t) + o(\tau).$$

Ainsi :

$$P(t + \tau, x) \underset{\tau \rightarrow 0}{=} P(t, x) + \tau \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) + o(\tau).$$

La fonction $g : x \mapsto P(t, x)$ est $\mathcal{C}^\infty$, elle admet donc un développement limité à l'ordre 2 en x , d'après la formule de Taylor-Young :

$$\begin{cases} g(x + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} g(x) + hg'(x) + \frac{h^2}{2}g''(x) + o(h^2) \\ g(x - h) \underset{h \rightarrow 0}{=} g(x) - hg'(x) + \frac{h^2}{2}g''(x) + o(h^2). \end{cases}$$

Ainsi, puisque $p + q = 1$, $p = q = \frac{1}{2}$, et :

$$\begin{aligned} & pP(t, x - h) + qP(t, x + h) \\ & \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(P(t, x) - h \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) + o(h^2) \right) + \frac{1}{2} \left(P(t, x) + h \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) + o(h^2) \right) \\ & \underset{h \rightarrow 0}{=} P(t, x) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) + o(h^2). \end{aligned}$$

4. Soit $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Puisque, pour tout $(\tau, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $\frac{h^2}{2D} = \tau$,

$$P(t + \tau, x) \underset{\tau \rightarrow 0}{=} P(t, x) + \tau \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) + o(\tau),$$

alors :

$$P(t + \tau, x) \underset{h \rightarrow 0}{=} P(t, x) + \frac{h^2}{2D} \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) + o(h^2),$$

D'après la question précédente et par unicité du développement limité en 0 à l'ordre 2, on a :

$$\frac{1}{2D} \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x),$$

Ainsi :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x).$$

5. La question fait ici écho au modèle logistique de population dont l'équation est de la forme :

$$\frac{dy}{dt} = ay \left(1 - \frac{y}{K} \right).$$

Le terme $rn(1 - n)$ correspond donc ici à la variation d'une population à un instant donné, sans considération spatiale.

6. Posons $\alpha = \frac{1}{r}$ et $\beta = \sqrt{\frac{D}{r}}$ (légitime car $r > 0$ et $D > 0$).

D'après la relation (8), on a, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial n}{\partial t}(\alpha t, \beta x) = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(\alpha t, \beta x) + rn(\alpha t, \beta x) (1 - n(\alpha t, \beta x)). \quad (\star)$$

Avec la définition de $\tilde{n}$, on a, d'après respectivement les règles 1.a (appliquée une fois) et 1.b (appliquée deux fois) :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t}(t, x) = \alpha \frac{\partial n}{\partial t}(\alpha t, \beta x) \\ \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2}(t, x) = \beta^2 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(\alpha t, \beta x). \end{cases}$$

Ainsi :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t}(\alpha t, \beta x) = r \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t}(t, x) \\ \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(\alpha t, \beta x) = \frac{r}{D} \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2}(t, x). \end{cases}$$

On déduit alors de la relation $(\star)$ que, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$r \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t}(t, x) = D \times \frac{r}{D} \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2}(t, x) + r \tilde{n}(t, x) (1 - \tilde{n}(t, x)).$$

Puisque $r \neq 0$, on en déduit que :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2}(t, x) + \tilde{n}(t, x) (1 - \tilde{n}(t, x)).$$

7. Soit n une solution en onde progressive de (8) de vitesse de propagation c et de profil d'onde $\bar{n}$.

En appliquant respectivement les règles 1.a (une fois) et 1.b (deux fois), on obtient :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t}(t, x) = -c\bar{n}'(x - ct) \\ \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(t, x) = \bar{n}''(x - ct). \end{cases}$$

D'après la relation (8), on a :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, -c\bar{n}'(x - ct) = \bar{n}''(x - ct) + \bar{n}(x - ct)(1 - \bar{n}(x - ct)).$$

La relation étant vraie pour $t = 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, -c\bar{n}'(x) = \bar{n}''(x) + \bar{n}(x)(1 - \bar{n}(x)).}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_n \in]n, n+1[$ tel que $\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(\xi_n)$, i.e.

$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n).$$

Puisque $\lim_{+\infty} f = L$, on a, par passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(\xi_n) = 0.$$

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n > n$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = +\infty$.

On a donc construit une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(\xi_n) = 0.}$$

- 9.1 D'après la définition de V , on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, V'(\xi) = \frac{\bar{n}''(\xi)\bar{n}(\xi) - \bar{n}'(\xi)^2}{\bar{n}(\xi)^2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{R}, V'(\xi) + V(\xi)^2 + 1 - \bar{n}(\xi) &= \frac{\bar{n}''(\xi)\bar{n}(\xi) - \bar{n}'(\xi)^2}{\bar{n}(\xi)^2} + \frac{\bar{n}'(\xi)^2}{\bar{n}(\xi)^2} + 1 - \bar{n}(\xi) \\ &= \frac{\bar{n}''(\xi) + \bar{n}(\xi)(1 - \bar{n}(\xi))}{\bar{n}(\xi)} \\ &= -cV(\xi). \end{aligned}$$

On obtient bien le résultat attendu :

$$\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R}, -cV(\xi) = V'(\xi) + V(\xi)^2 + 1 - \bar{n}(\xi)}$$

- 9.2 D'après la question 7 et les hypothèses admises sur V , il existe une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V'(\xi_n) = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-cV(\xi_n) = V'(\xi_n) + V(\xi_n)^2 + 1 - \bar{n}(\xi_n)$.

Puisque $\lim_{+\infty} \bar{n} = 0$, on obtient, par passage à la limite : $\boxed{c\lambda = \lambda^2 + 1.}$

- 9.3 On déduit de la relation précédente que $c = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$ où $\lambda > 0$.

Étudions la fonction $\phi : \lambda \mapsto \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall \lambda > 0, \phi'(\lambda) = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda^2}.$$

La fonction ϕ est donc décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Elle atteint donc un minimum en $\lambda = 1$. Ainsi $c \geq \phi(1)$, i.e. :

$$\boxed{c \geq 2.}$$

On pouvait aussi utiliser la positivité du discriminant du trinôme du second degré $X^2 - cX + 1$ (puisque'il admet une racine réelle λ).