

Partie I

1. a. Minimiser F revient à chercher les réels a , b et c qui minimisent la somme des carrés des distances verticales entre les points (t_i, y_i) pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et la courbe de la fonction polynômiale $p : x \mapsto a + bx + cx^2$. Il s'agit donc d'un ajustement polynômial de degré deux au sens des moindres carrés.
- b. La fonction F est une fonction polynômiale en ses trois variables, elle admet donc des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables et :

$$\begin{aligned} \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \frac{\partial F}{\partial a}(a, b, c) &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bt_i - ct_i^2) \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a, b, c) &= -2 \sum_{i=1}^n t_i (y_i - a - bt_i - ct_i^2) \\ \frac{\partial F}{\partial c}(a, b, c) &= -2 \sum_{i=1}^n t_i^2 (y_i - a - bt_i - ct_i^2). \end{aligned}$$

2. a. Puisque :

$$T\beta = \begin{pmatrix} a + bt_1 + ct_1^2 \\ a + bt_2 + ct_2^2 \\ \vdots \\ a + bt_n + ct_n^2 \end{pmatrix},$$

on a bien :

$$Y - T\beta = \begin{pmatrix} y_1 - a - bt_1 - ct_1^2 \\ y_2 - a - bt_2 - ct_2^2 \\ \vdots \\ y_n - a - bt_n - ct_n^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$-2 \left\langle Y - T\beta; \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bt_i - ct_i^2) = \frac{\partial F}{\partial a}(a, b, c).$$

- b. De la même manière, on trouve que :

$$-2 \left\langle Y - T\beta; \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \right\rangle = -2 \sum_{i=1}^n t_i (y_i - a - bt_i - ct_i^2) = \frac{\partial F}{\partial b}(a, b, c).$$

3. Supposons que $\hat{\beta}$ soit solution du système. On en déduit que :

$$\left\langle Y - T\hat{\beta}; \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \left\langle Y - T\hat{\beta}; \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \left\langle Y - T\hat{\beta}; \begin{pmatrix} t_1^2 \\ \vdots \\ t_n^2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

L'interprétation du produit scalaire à l'aide du produit matriciel assure que :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} (Y - T\hat{\beta}) = 0 \\ \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} (Y - T\hat{\beta}) = 0 \\ \begin{pmatrix} t_1^2 & \dots & t_n^2 \end{pmatrix} (Y - T\hat{\beta}) = 0 \end{cases}$$

Puisque $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} t_1^2 & \dots & t_n^2 \end{pmatrix}$ sont les lignes de tT , on a alors :

$${}^tT(Y - T\hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire ${}^tTT\hat{\beta} = {}^tTY$ par distributivité.

4. a. Soit $u \in \mathbb{R}^p$.

Si $u \in \text{Ker}(A)$, alors $Au = 0$, ${}^tAAu = 0$ et ainsi $u \in \text{Ker } {}^tAA$. On en déduit donc que $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker } {}^tAA$.

Réciproquement, si $u \in \text{Ker } {}^tAA$, ${}^tAAu = 0$. On a alors :

$$\|Au\|^2 = {}^t(Au)(Au) = {}^t u {}^tAAu = 0.$$

On en déduit que $Au = 0$, i.e. $u \in \text{Ker}(A)$. On a donc prouvé que $\text{Ker } ({}^tAA) \subset \text{Ker}(A)$ et donc que $\text{Ker}(A) = \text{Ker } {}^tAA$.

- b. Notons f (resp. g) l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ canoniquement associée à la matrice A (resp. tA). On en déduit que $g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ (qui est un espace de dimension finie), dont la matrice dans la base canonique est tAA . On peut donc appliquer le théorème du rang à $g \circ f$:

$$\dim \text{Ker } ({}^tAA) + \text{rg } ({}^tAA) = \dim \text{Ker } (g \circ f) + \text{rg } (g \circ f) = \dim \mathbb{R}^p = p.$$

- c. On applique de la même manière le théorème du rang à l'application linéaire f :

$$\dim \text{Ker}(A) + \text{rg}(A) = \dim \text{Ker}(f) + \text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^p = p.$$

- d. On déduit des questions précédentes que $\text{rg } ({}^tAA) = \text{rg } A$.

Ainsi ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, son rang est égal à p , c'est-à-dire si, et seulement si $\text{rg } A = p$.

5. Dans le cas où tTT est inversible, on trouve immédiatement que $\hat{\beta} = ({}^tTT)^{-1} {}^tTY$

Partie II

1. a. L'affirmation est fausse : les coefficients de `initialisation(A)` ne peuvent pas être tous nuls puisque la matrice A est supposée inversible.
- b. L'affirmation est fausse : la matrice `initialisation(A)` n'est pas carrée alors que A l'est.
- c. L'affirmation est fausse : il n'y a pas d'erreur puisque la matrice `mat` construite a n lignes et au moins n colonnes.
- d. L'affirmation est vraie : la matrice `initialisation(A)`, à n lignes et $2n$ colonnes, est initialement nulle. On copie ensuite chacun des coefficients de la matrice A sur les n premières lignes et colonnes de `mat`.

2. a. La fonction `multip` réalise l'opération $L_i \leftarrow cL_i$ sur la matrice M .
- b. On parcourt chaque colonne des lignes i et j .

```
def ajout(M, i, j, c):
    p = np.shape(M)[1]
    for k in range(0, p):
        M[i,k] = M[i,k] + c*M[j,k]
```

- c. On parcourt chaque colonne des lignes i et j .

```
def permut(M, i, j):
    p = np.shape(M)[1]
    for k in range(0, p):
        M[i,k], M[j,k] = M[j,k], M[i,k]
```

3. En cas d'égalité, l'algorithme renvoie la plus petite valeur de r possible.

```
def rang_pivot(M, j):
    n = np.shape(M)[0]
    r = j
    for i in range(j+1, n):
        if abs(M[i,j]) > abs(M[r,j]):
            r = i
    return r
```

4. a. L'exécution de `mystere(M)` affiche autant de fois la matrice M qu'elle n'a de lignes, i.e. trois fois :

```
[ -6,  0, 12]
[  0,  2,  8]      # j = 0
[  0,  1,-1]
```

```
[ -6,  0, 12]
[  0,  2,  8]      # j = 1
[  0,  0,-5]
```

```
[-6,  0, 12]
[  0,  2,  8]      # j = 2
[  0,  0,-5]
```

- b. Plus généralement, la fonction `mystere` implémente la première partie l'algorithme du pivot de Gauss : l'échelonnement la sous matrice carrée composée des n premières lignes de la matrice passée en argument.

5. a.

```
def reduire(M):
    n = np.shape(M)[0]
    mystere(M)
    for i in range(n):
        multip(M, i, 1/M[i,i])
    for j in range(n-1, 0,-1):
        for k in range(j-1,-1,-1):
            ajout(M, k, j,-M[k,j])
```

- b. Cette fonction réalise le pivot total pour la sous-matrice carrée inversible constituée des n premières lignes de la matrice passée en argument.

6. a. Il suffit d'utiliser la fonction `initialisation` puis de compléter les n dernières colonnes :

```
def augmenter(A):
    M = initialisation(A)
    for i in range(n):
        M[i,n+i] = 1
    return M
```

- b. Il suffit d'utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre $AX = I_n$:
 - on commence par créer la matrice M en appliquant la fonction `augmenter` à la matrice A ;

- on applique ensuite la fonction **reduire** à la matrice M (toutes les opérations élémentaires sur A seront alors appliquées à I_n) ;
- on extrait la matrice carrée constituée des n dernières colonnes de M .

c. D'après la description de l'algorithme ci-dessus, on a :

```
def inverser(A):
    M = augmenter(A)
    reduire(M)
    return M[:, n:] # ou M[0:n, n:2*n]
```

d. Il s'agit de la méthode du pivot de Gauss.

Partie III

1. On est ramené à la résolution de l'équation différentielle à coefficients constants $y' + ky = 1$ sur $[0, +\infty[$. La résolution de l'équation homogène associée puis la recherche d'une solution constante ($k \neq 0$) donne l'ensemble des solutions :

$$\left\{ \begin{array}{ll} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \lambda e^{-kt} + \frac{1}{k}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

La condition initiale $x(0) = 0$ fournit l'unique solution recherchée, la fonction :

$$x : t \mapsto \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}).$$

2. a. Supposons Δ fixé ($\Delta > 0$). Puisque :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t - \Delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } t - \Delta < 0 \\ 1 & \text{si } t - \Delta \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \Delta \\ 1 & \text{si } t \geq \Delta \end{cases},$$

il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) - h(t - \Delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < \Delta \\ 0 & \text{si } t \geq \Delta \end{cases} = \delta(t).$$

- b. Puisque les fonctions h et δ coïncident sur l'intervalle $[0, \Delta]$, la solution recherchée x vérifie :

$$\forall t \in [0, \Delta], x(t) = \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}).$$

Remarquons que cette expression est encore valable pour $t = \Delta$ d'après l'énoncé. La fonction solution (avec condition initiale) vérifie donc :

$$\forall t \in [0, \Delta], x(t) = \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}).$$

Cette question était très mal posée et à la limite du hors-programme : elle traitait de l'unicité du problème de Cauchy qui était sous-entendue. L'énoncé aurait dû définir la notion de solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du premier ordre lorsque le second membre n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, à savoir un recollement continue de solutions sur des intervalles où le second membre est continue.

3. La fonction recherchée x est solution de :

- $y' + ky = 0$ sur $[0, t_{i-1}[$ et $[t_i, +\infty[$;
- $y' + ky = u_i$ sur $[t_{i-1}, t_i[$.

La condition initiale $x(0) = 0$ assure que x est nulle sur $[0, t_{i-1}[$.

La résolution de l'équation différentielle sur $[t_{i-1}, t_i[$, couplée à la condition implicite de continuité $x(t_{i-1}) = 0$, donne :

$$\forall t \in [t_{i-1}, t_i[, x(t) = \frac{u_i}{k} (1 - e^{-k(t-t_{i-1})}).$$

La résolution de l'équation différentielle sur $[t_i, +\infty[$, couplée à la condition implicite de continuité en t_i assure qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [t_i, +\infty[, x(t) = \lambda e^{-kt} \text{ où } \lambda \text{ vérifie } x(t_i) = \lambda e^{-kt_i} = \frac{u_i}{k} (1 - e^{-k\Delta}).$$

On en déduit que :

$$\forall t \in [t_i, +\infty[, x(t) = \frac{u_i}{k} (1 - e^{-k\Delta}) e^{-k(t-t_i)}.$$

4. Notons, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, f_j la fonction constante égale à u_j sur $[t_{j-1}, t_j[$, et nulle en dehors de cet intervalle (on ne fait que renommer les fonctions de la question précédente).

Puisque :

$$u = \sum_{j=1}^i f_j$$

le principe de superposition garantit que la solution de cette nouvelle équation différentielle avec condition initiale s'écrit comme la somme des solutions des équations différentielle (avec condition initiale) $y' + ky = f_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

On pouvait encore prouver le résultat par récurrence sur $i \in \mathbb{N}^$.*

5. En posant $\ell = i - j$, on a $j = i - \ell$ on trouve :

$$\begin{aligned} x(t_i) &= \sum_{j=1}^i u_j \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} e^{-k(t_i - t_j)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{i-1} u_{i-\ell} \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} e^{-k(t_i - t_{i-\ell})} \\ &= \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} \sum_{\ell=0}^{i-1} u_{i-\ell} e^{-k\ell\Delta} \\ &= \nu \sum_{\ell=0}^{i-1} u_{i-\ell} \Phi^\ell, \text{ où : } \nu = \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} \text{ et } \Phi = e^{-k\Delta}. \end{aligned}$$

6. Puisque les réels k et Δ sont strictement positifs, $0 < \Phi < 1$. La suite géométrique $(\Phi^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante et converge vers 0.

On en déduit que la valeur $x(t_i)$ du niveau du lac à l'instant t_i est une somme pondérée des précipitations des années précédentes. On remarque aussi que les coefficients de cette pondération décroissent exponentiellement (vers 0) avec la durée qui sépare ces précipitations de l'instant t_i .

Partie IV

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que $\text{Cov}(Z_n, Z_n) = \mathbb{V}(Z_n) = \sigma^2$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Puisque les variables aléatoire Z_n et Z_{n+p} sont indépendantes et admettent une variance, elles sont non corrélées, i.e. $\text{Cov}(Z_n, Z_{n+p}) = 0$

Ainsi :

$$\text{Cov}(Z_n, Z_{n+p}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

b. Le processus $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien stationnaire car :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Z_n) = m$, qui est indépendant de n ;
- pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $\text{Cov}(Z_n, Z_{n+p}) = \gamma_Z(p)$ où :

$$\gamma_Z : p \mapsto \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

est une fonction indépendante de n .

2. a. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\forall n \geq 1, \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(W_n) + \theta \mathbb{E}(W_{n-1}) = 0.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Cas où $p = 0$.

Puisque W_{n-1} et W_n admettent une variance, X_n admet une variance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{V}(W_n + \theta W_{n-1}) \\ &= \mathbb{V}(W_n) + 2\theta \text{Cov}(W_n, W_{n-1}) + \theta^2 \mathbb{V}(W_{n-1}) \text{ par bilinéarité de la covariance} \\ &= \gamma_W(0) + 2\theta \gamma_W(1) + \theta^2 \gamma_W(0) \\ &= \sigma^2 (1 + \theta^2) \end{aligned}$$

Cas où $p \in \mathbb{N}^*$.

Puisque W_{n-1} , W_n , W_{n+p-1} et W_{n+p} admettent une variance, X_n et X_{n+p} admettent une variance donc $\text{Cov}(X_n, X_{n+p})$ existe et :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_n, X_{n+p}) &= \text{Cov}(W_n + \theta W_{n-1}, W_{n+p} + \theta W_{n+p-1}) \\ &= \text{Cov}(W_n, W_{n+p}) + \theta \text{Cov}(W_n, W_{n+p-1}) \\ &\quad + \theta \text{Cov}(W_{n-1}, W_{n+p}) + \theta^2 \text{Cov}(W_{n-1}, W_{n+p-1}) \text{ par bilinéarité de la covariance} \\ &= \gamma_W(p) + \theta \gamma_W(p-1) + \theta \gamma_W(p+1) + \theta^2 \gamma_W(p) \\ &= \theta \gamma_W(p-1) = \begin{cases} \sigma^2 \theta & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{si } p \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{Cov}(X_n, X_{n+p}) = \begin{cases} \sigma^2 (1 + \theta^2) & \text{si } p = 0 \\ \sigma^2 \theta & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{si } p \geq 2. \end{cases}$$

c. D'après les questions précédentes, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus stationnaire.

3. a. Puisque $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus stationnaire, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_n) = \mu.$$

Toutes les variables aléatoires en jeu admettent une espérance donc par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X_n) - \phi \mathbb{E}(X_{n-1}) = \mathbb{E}(W_n) = 0.$$

On en déduit que $\mu(1 - \phi) = 0$. Puisque $\phi \neq 1$, $\mu = 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_n) = 0.$$

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a immédiatement : $X_n^2 - \phi X_{n-1}X_n = X_n W_n$. Puisque X_n admet une variance et (X_n, X_{n-1}) admet une covariance, X_n^2 et $X_{n-1}X_n$ admettent une espérance (en vertu du théorème de König-Huygens), et par linéarité $X_n W_n$ aussi.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n W_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - \phi \mathbb{E}(X_{n-1}X_n) \\ &= \gamma_X(0) - \phi (\text{Cov}(X_{n-1}, X_n) + \mathbb{E}(X_{n-1}) \mathbb{E}(X_n)) \\ &= \gamma_X(0) - \phi \gamma_X(1).\end{aligned}$$

- c. (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On multiplie la relation par W_n et on trouve :

$$X_n W_n = W_n^2 + \phi X_{n-1} W_n.$$

Puisque W_n^2 et $X_{n-1} W_n$ admettent une espérance, on trouve par linéarité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X_n W_n) = \mathbb{E}(W_n^2) + \phi \mathbb{E}(X_{n-1} W_n) = \gamma_W(0) = \sigma^2.$$

- (ii) En multipliant (5) par X_{n-1} , on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_{n-1}X_n - \phi X_{n-1}^2 = X_{n-1} W_n.$$

Par le même argument qu'à la question 3.c.(i), toutes les variables aléatoires de l'égalité ci-dessus admettent une espérance et on trouve par linéarité :

$$\gamma_X(1) - \phi \gamma_X(0) = 0.$$

- (iii) La résolution du système

$$\begin{cases} \gamma_X(0) - \phi \gamma_X(1) = \mathbb{E}(X_n W_n) = \sigma^2 \\ \gamma_X(1) - \phi \gamma_X(0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{assure que } \gamma_X(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \text{ et } \gamma_X(1) = \sigma^2 \frac{\phi}{1 - \phi^2}.$$

- d. On pouvait conjecturer la formule à l'aide du calcul de X_n sur de petites valeurs de n puis démontrer le résultat par récurrence. On propose ici une solution plus élégante.

Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n - 1$.

En divisant la relation (5) par ϕ^k (ϕ est supposé non nul), on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{X_k}{\phi^k} - \frac{X_{k-1}}{\phi^{k-1}} = \frac{W_k}{\phi^k}.$$

En sommant et en reconnaissant une somme télescopique, on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n-p}^n \frac{W_k}{\phi^k} &= \sum_{k=n-p}^n \frac{X_k}{\phi^k} - \frac{X_{k-1}}{\phi^{k-1}} \\ &= \frac{X_n}{\phi^n} - \frac{X_{n-p-1}}{\phi^{n-p-1}}.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$X_n = \phi^{p+1} X_{n-(p+1)} + \sum_{k=n-p}^n W_k \phi^{n-k}.$$

En choisissant $p = n - 1$ et en réalisant le changement de variable $\ell = n - k$, on obtient

$$X_n = \phi^n X_0 + \sum_{\ell=0}^{n-1} W_{n-\ell} \phi^\ell.$$

Si on suppose que $X_0 = 0$ comme dans la partie III, on trouve alors que :

$$X_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} W_{n-\ell} \phi^\ell.$$

On retrouve alors une équation similaire à l'équation (3), à constante multiplicative près, X_n et W_n représentant alors respectivement le niveau du lac et le débit d'entrée du lac à l'instant n .

Partie V

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le modèle (6) peut s'écrire :

$$X_n - X_{n-1} = W_n - (1 - \phi)X_{n-1},$$

où :

- le terme $X_n - X_{n-1}$ représente la différence de hauteur entre les instants $n - 1$ et n ,
- le terme W_n représente à constante multiplicative près le débit entrant : le choix d'un bruit blanc d'espérance μ strictement positif permet de rendre compte que le débit entrant a chaque année la même espérance μ et même variance σ^2 mais qu'il n'y a pas de corrélation entre les débits obtenus au cours des différentes années,
- le terme $(1 - \phi)X_{n-1}$ représente à une constante multiplicative près le débit sortant qui est proportionnel à la hauteur à l'instant $n - 1$.

2. a. On fait le calcul :

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma}_U(0) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (U_j - \bar{U})^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (U_j^2 - 2\bar{U}U_j + \bar{U}^2) \\
 &= \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j^2 \right) - 2\bar{U} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j \right) + \bar{U}^2 \\
 &= \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j^2 \right) - \bar{U}^2 \\
 &= \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j^2 \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j \right)^2.
 \end{aligned}$$

b. Supposons que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus stationnaire d'espérance m . Par linéarité de l'espérance, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\hat{\gamma}_U(0)) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(U_j^2) - \frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n U_i \right) \left(\sum_{j=1}^n U_j \right) \right] \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(U_j^2) - \frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n U_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} U_i U_j \right] \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(U_i^2) - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(U_i^2) - \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{E}(U_i U_j) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(U_i^2) - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(U_i^2) - \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-i} \mathbb{E}(U_i U_{i+p})
 \end{aligned}$$

D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(U_i^2) = \mathbb{V}(U_i) + \mathbb{E}(U_i)^2 = \gamma_U(0) + m^2$$

et

$$\forall(i, p) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{E}(U_i U_{i+p}) = \text{Cov}(U_i, U_{i+p}) + \mathbb{E}(U_i) \mathbb{E}(U_{i+p}) = \gamma_U(p) + m^2.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\hat{\gamma}_U(0)) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\gamma_U(0) + m^2) - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\gamma_U(0) + m^2) - \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-i} (\gamma_U(p) + m^2) \\
 &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2} \left[n(\gamma_U(0) + m^2) + 2 \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-p} (\gamma_U(p) + m^2) \right] \\
 &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2} \left[n(\gamma_U(0) + m^2) + 2 \sum_{p=1}^{n-1} (n-p)(\gamma_U(p) + m^2) \right]
 \end{aligned}$$

c. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\hat{\gamma}_U(0)) &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2} \left[n(\gamma_U(0) + m^2) + 2 \sum_{p=1}^{n-1} (n-p)(\gamma_U(p) + m^2) \right] \\
 &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2} \left[n\gamma_U(0) + nm^2 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} (n-p)\gamma_U(p) + 2m^2 \sum_{i=1}^{n-1} i \right] \\
 &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2} \left[n\gamma_U(0) + nm^2 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} (n-p)\gamma_U(p) + n(n-1)m^2 \right] \\
 &= \gamma_U(0) - \frac{1}{n^2} \left[n\gamma_U(0) + 2 \sum_{p=1}^{n-1} (n-p)\gamma_U(p) \right]
 \end{aligned}$$

d. D'après la question précédente, on a :

$$\mathbb{E}(\hat{\gamma}_U(0)) = \gamma_U(0) - \frac{1}{n} \gamma_U(0) - \frac{2}{n^2} \sum_{p=1}^{n-1} (n-p)\gamma_U(p).$$

Puisque la série $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \gamma_U(p)$ est supposée absolument convergente, on a :

$$\left| \frac{2}{n^2} \sum_{p=1}^{n-1} (n-p)\gamma_U(p) \right| \leq \frac{2}{n^2} \sum_{p=1}^{n-1} n|\gamma_U(p)| = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} |\gamma_U(p)| \leq \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{+\infty} |\gamma_U(p)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit par passage à la limite que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\hat{\gamma}_U(0)) = \gamma_U(0)$, i.e. $\hat{\gamma}_U(0)$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\gamma_U(0)$.

3. Notons $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le processus de variables aléatoires correspondant aux niveaux du lac Huron à partir de l'année initiale notée 0. On suppose que l'on dispose des valeurs des niveaux du lac au cours des k premières années : ce sont des réalisations des variables $(X_n)_{n \leq k}$. On souhaite alors prédire les valeurs de niveaux pour les années suivantes.

Le modèle proposé s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \mu - \phi X_{n-1} + Z_n,$$

où $Z_n \hookrightarrow \mathcal{BB}(0, \sigma^2)$. À l'aide des données dont on dispose :

- on détermine des estimateurs $\hat{\mu}$ de μ et $\hat{\phi}$ de ϕ , par exemple en utilisant un critère des moindres carrés ;
- on calcule les valeurs des réalisations de $(U_n)_{n < k}$ obtenues ;
- on calcule alors l'estimateur asymptotiquement sans biais $\hat{\gamma}_U(0)$ de $\gamma_U(0)$ qui fournit donc un estimateur $\hat{\sigma}^2$ de σ^2 (partie IV, question 3.c.(iii)).

D'après la question 1. de la partie IV, on peut obtenir un bruit blanc $\tilde{Z}_n$ avec des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées qui suivent la loi normale $\mathcal{N}(0, \hat{\sigma}^2)$. On détermine alors des prédictions des variables $(X_n)_{n > k}$ en utilisant la relation de récurrence :

$$\forall n > k, X_n = \hat{\mu} - \hat{\phi} X_{n-1} + \tilde{Z}_n.$$