Colle BCPST 2 couples de var

SUJET 1

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0;1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On s'intéresse dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.

On dit que la première série est de longueur n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté.

De même, la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note P_k (resp. F_k) l'événement : « le k-ième lancer amène pile (resp. face) ».

PARTIE I - Étude des longueurs de séries

On note L_1 (resp. L_2) la variable aléatoire égale à la longueur de la première (resp. deuxième) série.

1. **a.** Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_k et F_k pour $k \in [\![1;n+1]\!]$.

   b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(L_1 = n) = p^n q + q^n p.$

   c. Vérifier (par le calcul) : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(L_1 = n) = 1.$

2. **a.** Exprimer, pour tous n, k de $\mathbb{N}^*$, l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_k et F_k pour $k \in [\![1;n+k+1]\!]$.

   b. En déduire la loi du couple (L_1, L_2).

3. **a.** Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$

   b. Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance et que $\mathbf{E}(L_2) = 2$.

4. **a.** Les variables aléatoires L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

5. **Simulation informatique -**

   a. Écrire une fonction `simule_L(p)` qui, étant donné un réel p de $]0;1[$, simule un certain nombre de lancers et qui renvoie les valeurs de L_1 et L_2 obtenues.

SUJET 2 (3/2)

Un joueur dispose de N dés équilibrés à 6 faces. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de 6 obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de 6 obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$. S'il ne reste plus de dés au m-ème lancer, on a alors, pour tout $k \geqslant m$, $X_k = 0$.
Pour tout entier naturel non nul n, on définit la variable $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, qui correspond alors au nombre de 6 obtenus après n lancers.

1. Écrire une fonction Python `X(N)` qui prend en argument le nombre de dés N et renvoie la valeur de X_1.
2. En déduire une fonction Python `S(N,n)` qui prend en arguments les nombre de dés N et n le nombre de lancers effectués et renvoie la valeur de S_n.
3. On se propose de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n et on cherchera à déterminer p_n.
   (a) **Question préliminaire :** Soient N, M et $k \in \mathbb{N}$ avec $M \leqslant k \leqslant N$. Montrer que :
   $$\binom{N}{M}\binom{N-M}{k-M} = \binom{N}{k}\binom{k}{M}.$$
   (b) Montrer que la proposition est vérifiée pour $n = 1$ et déterminer p_1.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que S_n suit une loi binomiale de paramètre N et p_n.
      i. Soient M et k deux entiers naturels tels que $M \leqslant k \leqslant N$. Déterminer $P(X_{n+1} = k - M \mid S_n = M)$.
      ii. En déduire que S_{n+1} suit une loi binomiale de paramètres N et p_{n+1} où $p_{n+1} = \dfrac{1+5p_n}{6}$.
   (d) Déterminer une expression explicite de p_n.
4. On admet qu'il est presque-sûr qu'on obtienne tous les 6 au bout d'un nombre fini de lancers, c'est-à-dire qu'il existe presque sûrement un rang $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $S_n = N$.
   On note T le nombre de lancers nécessaires pour n'avoir que des 6 (et on pose par convention $T = +\infty$ si on n'obtient jamais tous les 6, ce qui a une probabilité nulle d'arriver), c'est-à -dire
   $$T = \min(\{n \geqslant 1 \mid S_n = N\} \cup \{+\infty\}).$$
   Déterminer la fonction de répartition de T.
5. Vérifier que la variable T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci.
   On admettra le résultat suivant : T admet une espérance si la série $\sum P(T > n)$ est convergente et dans ce cas $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n)$.

SUJET 3 (5/2)

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère N urnes, numérotées de 1 jusqu'à N, sachant que pour chaque i, l'urne numérotée i contient i jetons numérotés de 1 à i. On considère l'épreuve aléatoire consistant en une suite de tirages selon les règles suivantes :

— le premier tirage est effectué dans l'urne numérotée N ;

— si le jeton obtenu au k-ème tirage porte le numéro i, alors le $(k+1)$-ème tirage est effectué dans l'urne numérotée i ;

— les différents jetons d'une même urne sont tirés équiprobablement.

On note, pour chaque k entier naturel non nul, X_k la variable aléatoire donnant le numéro du jeton obtenu au k-ème tirage.

1. Quelle est la loi de X_1 ?
2. Écrire une fonction (en Python), prenant en argument un entier N, qui simule l'expérience ci-dessus, et renvoie le nombre de tirages nécessaires à l'obtention du premier 1.
3. Établir, pour k entier naturel non nul et $i \in [\![1, N]\!]$:
$$P(X_{k+1} = i) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j} P(X_k = j).$$
4. Montrer que pour tout k entier naturel non nul, la suite finie $(P(X_k = i))_{1 \leqslant i \leqslant N}$ est décroissante.
5. (a) Montrer que la suite $(P(X_k = 1))_{k \in \mathbf{N}^*}$ est croissante, puis justifier qu'elle est convergente.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$P(X_{k+1} = 1) \geqslant P(X_k = 1) + \frac{1}{N}(1 - P(X_k = 1)).$$

   (c) En déduire que $\lim_{k \to \infty} P(X_k = 1) = 1$.
   Que peut-on dire de l'événement « Tous les tirages donnent un numéro différent de 1 » ?
6. On fixe i un entier naturel compris entre 2 et N.
   Déduire de la question précédente que, pour tout $i \in [\![2, N]\!]$, $\lim_{k \to \infty} P(X_k = i) = 0$.
7. On note Y_N le rang du tirage pour lequel on obtient le jeton 1 pour la première fois. On peut démontrer et nous l'admettons que :
$$E(Y_N) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}$$
   Réaliser une simulation qui confirme graphiquement cette expression de $E(Y_N)$ en fonction de N.

SUJET 4

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soient X, Y et Z trois variables aléatoire mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que X, Y et Z suivent toutes les trois la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1) a) Montrer que, pour tout k de $[\![2, n+1]\!]$:

$$P(X + Y = k) = \frac{k-1}{n^2}.$$

b) Montrer que, pour tout k de $[\![n+2, 2n]\!]$:

$$P(X + Y = k) = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

Indication : un tableau à double entrée (contenant les valeurs possibles de X et Y) peut aider dans cette question.

2) A l'aide de la première question et de la formule des probabilités totales, montrer :

$$P(X + Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}.$$

3) On définit la variable aléatoire T par $T = n + 1 - Z$.

a) Montrer que T suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

b) Justifier que les variables aléatoires T, X et Y sont mutuellement indépendantes.

c) En faisant intervenir la variable T et en utilisant la deuxième question, déterminer :

$$P(X + Y + Z = n + 1).$$