Billes de plomb

La grenaille de plomb a été utilisée comme munition pour les fusils. Elle a été produite de manière artisanale, puis industriellement, à partir de la fin du XIXe siècle jusqu'à très récemment, dans des « tours à plomb ».

Le plomb était monté au sommet de la tour sous forme de lingots, puis fondu sur place dans un petit four à une température supérieure à 300 °C. On le faisait s'écouler du haut de la tour à travers une grille calibrée, ce qui permettait d'obtenir de fines gouttelettes de plomb qui s'arrondissaient et pré-durcissaient durant leur chute. Elles terminaient leur course dans un bassin d'eau de refroidissement.

Tour à plomb à Séville (Espagne)

Données

- Masse volumique du plomb solide : $\rho_{Pb} = 11\ 350\ kg.m^{-3}$
- Capacité thermique massique du plomb : $c = 129\ J.kg^{-1}.K^{-1}$
- Rayon des billes de plomb : $r = 1{,}2$ mm
- Température de fusion du plomb sous une pression de 1 bar : $T_{fus} = 600$ K
- Température ambiante : $T_{ext} = 283$ K
- Enthalpie massique de fusion du plomb : $l_{fus}(600K) = 23{,}2$ J.g-1
- Coefficient d'échange conducto-convectif entre le plomb et l'air ambiant : $h = 50\ W.m^{-2}.K^{-1}$

<u>Question simple</u>

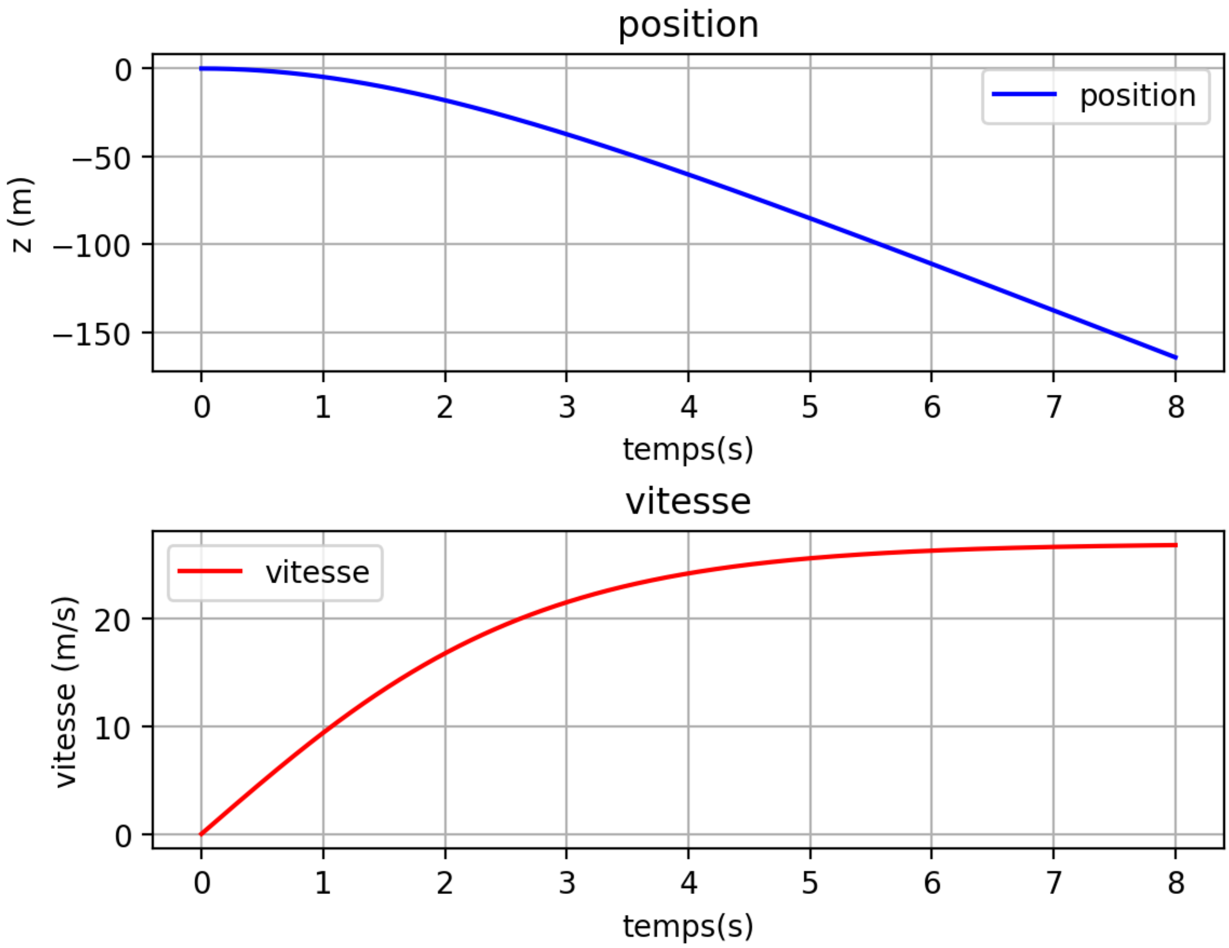
- ✓ Déterminer l'expression du temps de solidification d'une bille de plomb de masse m initialement liquide à la température T_{fus}.
- ✓ Avec une analyse unidimensionnelle, déterminer le lien entre une hauteur H, un temps t et l'intensité de pesanteur g.

<u>Question ouverte</u> :

- ✓ Déterminer la hauteur minimale de la tour pour que la bille de plomb, initialement liquide à la température $T_{initiale} = 630$ K arrive à l'état solide au niveau du sol.
- ✓ Quelle(s) hypothèse(s) de votre modèle le script python fourni permet-il de corriger ? Quelle hauteur minimale de la tour détermine-t-on à l'aide des graphiques retournés par ce programme ?

Document : on donne le script Python ci-dessous.

```python
#Importation des bibliothèques
import matplotlib.pyplot as plt
from math import pi


#Données numériques
g=9.8           #accélération de la pesanteur en m/s2
mu=12.35e3      #masse volumique de la bille en kg/m3
r=1.2e-3        #rayon de la bille en m
rho=1.2         #masse volumique de l'air en kg/m3
eta=1.8e-5      #viscosité dynamique de l'air en Pl
z0=0            #altitude initiale (en m)
zpoint0=.000001 #composante verticale initiale de la bille en m/s

#Calcul de la masse de la bille
m = 4/3 * mu * pi * r**3

#Calcul de section droite de la bille
A = pi * r**2

#Paramètres de la méthode d'intégration
deltat=0.001     # pas de calcul en s
duree = 8       # durée d'intégration en s


#Initialisation de listes
LT=[0]                                   #Liste des dates successives
Lzpoint=[zpoint0]                        #Liste des composantes verticales successives de la vitesse
Lv = [abs(zpoint0)]                      #Liste des vitesses successives
Lz=[z0]                                  #Liste des positions successives


#Définition d'une fonction permettant de calculer l'intensité de la force de frottements
def F(Re) :
    if Re<=.1 :
        Cx = 24/Re
    elif .1<Re<=1000 :
        Cx = 24/Re*(1+.14*Re**.7)
    elif 1000<Re<=3e5 :
        Cx = .445
    else :
        Cx = .19 - 8e4/Re
    return -.5 * Cx * A * rho * zpoint * abs(zpoint)


#Boucle d'intégration Euler. L'axe (Oz) est choisi vertical ascendant.
nbpts=duree/deltat
i=1
while i<=nbpts :
    zpoint=Lzpoint[-1]
    z=Lz[-1]
    Re = 2*r * rho * abs(zpoint) / eta
    LT.append(i * deltat)
    Lzpoint.append(zpoint + deltat * (-(1-rho/mu)*g + F(Re)/m))
    Lz.append(z + zpoint * deltat)
    Lv.append(abs(Lzpoint[-1]))
    i=i+1


#Tracé des courbes simulées : vitesse et altitude en fonction de temps
print(Re)
plt.subplot(211)
plt.plot(LT,Lz,'b-',label='position')
plt.xlabel('temps(s)')
plt.ylabel('z (m)')
plt.title('position')
plt.legend()
plt.grid()

plt.subplot(212)
plt.gcf().subplots_adjust(left = 0.125, bottom = 0.1, right = 0.9, top = 0.9, wspace = 0.2, hspace = 0.5)
plt.plot(LT,Lv,'r-',label='vitesse')
plt.xlabel('temps(s)')
plt.ylabel('vitesse (m/s)')
plt.title('vitesse')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```


position
0
−50
−100
−150
z (m)
position
0
1
2
3
4
5
6
7
8
temps(s)
vitesse
vitesse
20
10
0
vitesse (m/s)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
temps(s)

1.

Billes de Plomb.

Question simple.

- { bille de plomb liquide de rayon r à la t° T_{fus} }

Solidification isobare $\Rightarrow \Delta H = Q$

avec $\Delta H = -m\, l_{fus} = -\rho_{Pb} \frac{4}{3}\pi r^3 l_{fus}$

$$Q = \phi \Delta t = h(T_{ext} - T_{fus})\, 4\pi r^2 \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\rho_{Pb} \frac{4}{3}\pi r^3 l_{fus}}{4\pi r^2 h (T_{fus} - T_{ext})} = \frac{\rho_{Pb}\, r\, l_{fus}}{3h(T_{fus} - T_{ext})}$$

AN : $\Delta t = 6{,}1\ s$

- g en $m \cdot s^{-2} \Rightarrow \in \mathcal{L}\sqrt{H/g}$

Question ouverte.

- obj 1 : temps total de solidification (Δt_{tot})

$$\text{bille liquide } T_{initiale} \xrightarrow[\Delta t_1]{①} \text{bille liquide } T_{fusion} \xrightarrow[\Delta t_2]{②} \text{bille solide } T_{fusion}.$$

$\Delta t_{tot} = \Delta t_1 + \Delta t_2$ avec Δt_2 déterminé dans la question simple.

phase ① : { bille de plomb liquide de rayon r }

Evolution isobare : $dH = \delta Q \Rightarrow m c\, dT = h(T_{ext} - T) S\, dt$

$$\Rightarrow \quad mc\frac{dT}{dt} + hST = hS\,T_{ext}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} + \frac{hS}{mc}T = \frac{hS}{ms}T_{ext}$$

on pose $\tau = \frac{mc}{hS} = \frac{\rho_{Pb}\, r\, c}{3h}$

$$\Rightarrow \quad T(t) = Ae^{-t/\tau} + T_{ext} \underset{T(t=0)=T_{initiale}}{\Rightarrow} (T_{initiale} - T_{ext})e^{-t/\tau} + T_{ext}$$

Soit t_1 le temps tel que $T(t=t_1) = T_{fus}$

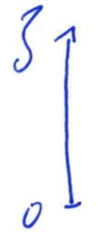
$$\Rightarrow \quad t_1 = \tau \ln \frac{T_{initiale} - T_{ext}}{T_{fus} - T_{ext}} = \frac{\rho_{Pb}\, r\, c}{3h} \ln\left(\frac{T_{initiale} - T_{ext}}{T_{fus} - T_{ext}}\right)$$

AN : $t_1 = 1\ s$

D'où $\underline{\Delta t_{tot}} = t_1 + \Delta t_2 = \underline{7{,}1\ s}$

• obj 2 : déterminer le temps de chute sur une hauteur H

* modèle 1 : chute sans frottement



{bille}.

PFD : $\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H.$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

La hauteur H minimale est telle que : $\Delta t_{tot} = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{g}{2}\Delta t_{tot}^2$$

AN : $\underline{H = 247\,m}$

* modèle 2 : chute avec des frottements modélisés par la loi de Stokes

PFD : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -6\pi\eta r \vec{v} + m\vec{g}$.

$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho_{Pb} \times r^2} \vec{v} = \vec{g}$

on pose $\tau = \frac{2 \rho_{Pb} r^2}{9\eta} = 170\,s$ $\Rightarrow$ on ne peut pas supposer que la bille chute à vitesse limite constante

$\Rightarrow$ résolution de l'équation différentielle à l'aide du script Python qui prend en compte la modification de l'expression de la force de frottement fluide en fonction du nombre de Reynolds (ainsi que la poussée d'Archimède)

on se place à $t = 7,1\,s$ sur le graphique donnant la position $\Rightarrow$ $\underline{\underline{H = 140\,m}}$