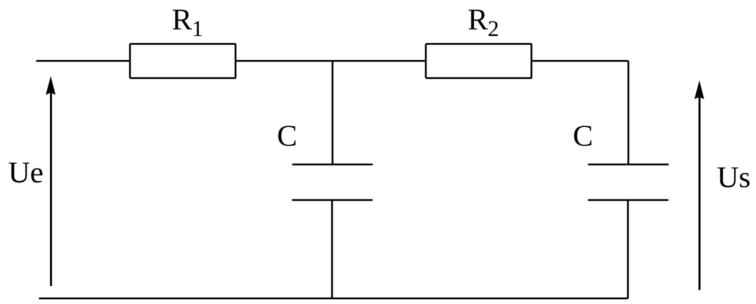
Etude d'un filtre

Question simple

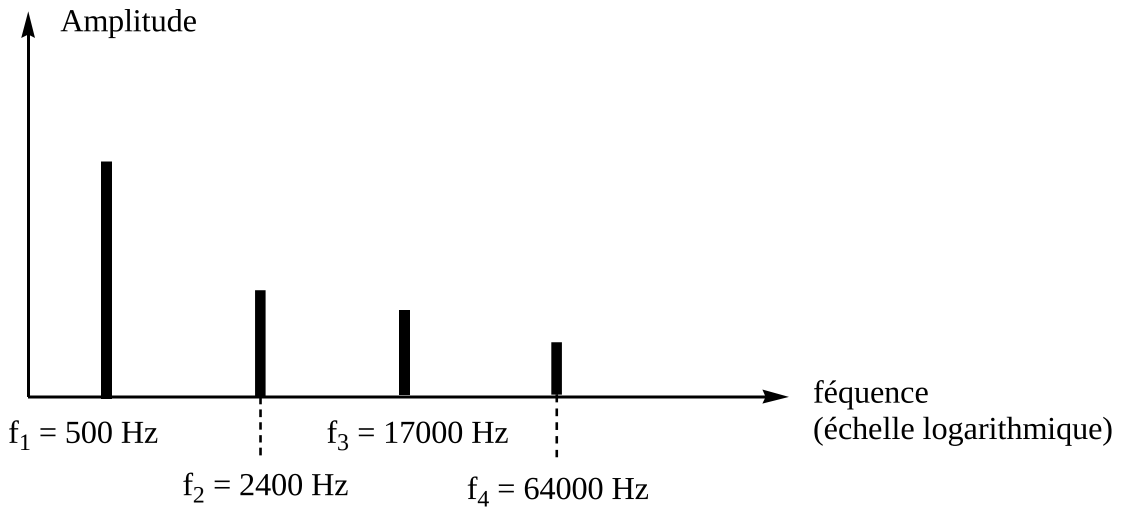
On considère le circuit suivant :



Le générateur délivre une tension constante Ue = E. Etablir l'équation différentielle vérifiée par Us au cours du temps et la mettre sous la forme canonique en faisant intervenir la pulsation propre et le facteur de qualité.

Question ouverte

On considère un signal d'entrée Ue(t) dont le spectre est le suivant :



On souhaite filtrer ce signal en utilisant le circuit de la question simple.

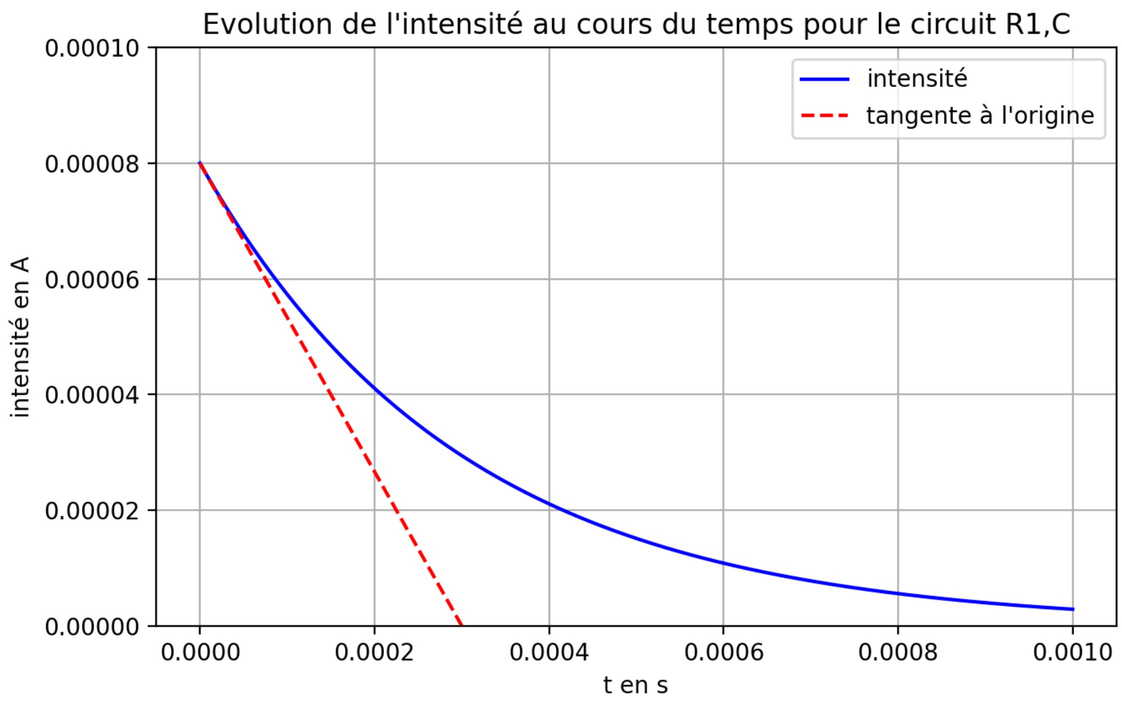
Cahier des charges du filtre à utiliser : • Isoler le signal de fréquence $f_1 = 500$ Hz • En notant G le gain du filtre : – $f < f_1$ $G > 1/\sqrt{2}$ – $f > 50\,000$ Hz $G < 2/100$

A l'aide des résultats des expériences 1 et 2, déterminer les valeurs numériques de R_1, R_2 et C des dipôles utilisés. Le filtre construit répond-il au cahier des charges ?

Expérience 1 : on considère l'association série du conducteur ohmique de résistance R_1 avec un condensateur de capacité C initialement déchargé. Le signal délivré par le générateur est tel que :

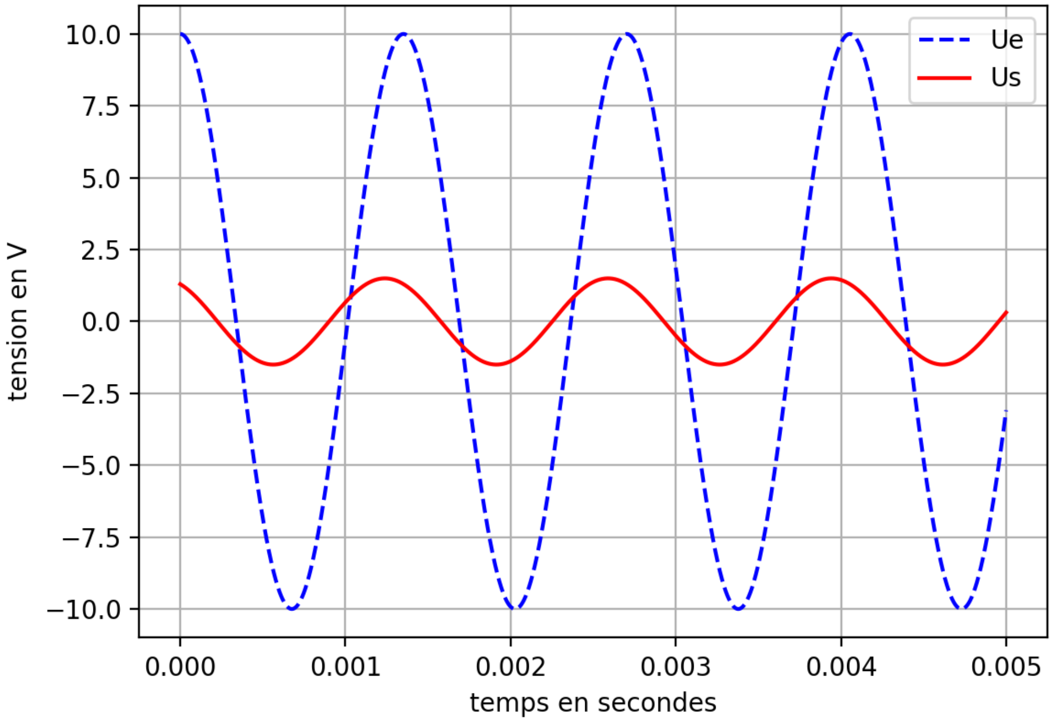
- $t < 0$: $Ue = 0$ V
- $t \geq 0$: $Ue = E = 4$V

On enregistre l'intensité dans le circuit. On obtient le graphe suivant sur lequel a également été représenté la tangente à l'origine.



Expérience 2

On alimente le filtre de la question simple avec un signal $U_e(t)$ sinusoïdal de fréquence f = 740 Hz. On représente ci-dessous les évolutions de $U_e(t)$ et $U_s(t)$.



Pour exploiter complètement cette seconde expérience, on donne le code python ci-dessous,

```
1  import numpy as np
2  from scipy.optimize import bisect
3
4  # valeurs des constantes
5  G0 = 0.15        # valeur du gain à la fréquence f
6  f =  740         # valeur de la fréquence en Hz
7  R1 = 50000       # résistance en Ohm
8  C = 6e-9         # capacité du condensateur en F
9
10 # calcul de la pulsation
11 omega = 2*np.pi*f
12
13 def f(R2):
14     return (1-R1*R2*C**2*omega**2)**2+C**2*omega**2*(2*R1+R2)**2-1/(G0**2)
15
16 #la commande bisect opère par dichotomie. Sa syntaxe s'écrit bisect(fonction,borne_inf,borne_sup)
17 zero = bisect(f,10000,120000)
18 print(zero)
```

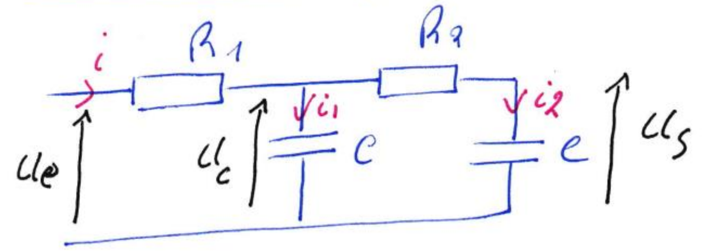
ainsi que le résultat de son exécution :

```
>>> (executing lines 1 to 18 of "filtre
passse bas.py")
108899.0226531837
```

Justifier les lignes 5 et 14 du script. Que représente la valeur numérique renvoyée par ce programme ?

étude d'un filtre

• Question simple.



$$i = i_1 + i_2 \quad (a)$$

$$i_1 = C\frac{dU_c}{dt} \quad (b)$$

$$i_2 = C\frac{dU_s}{dt} \quad (c)$$

$$U_c = R_2 i_2 + U_s = R_2 C\frac{dU_s}{dt} + U_s \quad (d)$$

$$U_e = R_1 i + U_c \Rightarrow i = \frac{U_e - U_c}{R_1} \quad (e)$$

$$(a) \Rightarrow \frac{U_e - U_c}{R_1} = C\frac{dU_e}{dt} + C\frac{dU_s}{dt}$$

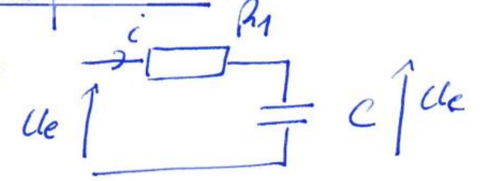
$$\underset{(d)}{\Rightarrow} \frac{U_e}{R_1} - \frac{R_2}{R_1}C\frac{dU_s}{dt} - \frac{U_s}{R_1} = R_2 C^2\frac{d^2U_s}{dt^2} + C\frac{dU_s}{dt} + C\frac{dU_s}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2U_s}{dt^2} + \frac{1}{R_2C^2}\left(2C + \frac{R_2}{R_1}C\right)\frac{dU_s}{dt} + \frac{U_s}{R_2R_1C^2} = \frac{U_e}{R_1R_2C^2}$$

On pose $\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{1}{R_2R_1C^2} \\ \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{R_2C}\left(2 + \dfrac{R_2}{R_1}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{C\sqrt{R_2R_1}} \\ Q = \dfrac{\sqrt{R_1R_2}}{2R_1 + R_2} \end{cases}$

- Question ouverte.

Expérience 1



$U_e = R_1 i + U_c$
$i = C\dfrac{dU_c}{dt}$ $\Big\}$ $U_e = R_1 C \dfrac{dU_c}{dt} + U_c$

$t \geq 0$: $U_e = E \Rightarrow U_c(t) = Ae^{-t/\tau} + E$ avec $\tau = R_1 C$

$\boxed{CI}$ $U_c(t=0^-) = 0 = U_c(t=0^+) \Rightarrow A = -E$

$\Rightarrow U_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$

$i = C\dfrac{dU_c}{dt} \Rightarrow i = C\dfrac{E}{\tau}e^{-t/\tau} = \dfrac{E}{R_1}e^{-t/\tau}$

- Exploitation du graphique :

* $i(t=0) = \dfrac{E}{R_1} \Rightarrow R_1 = \dfrac{E}{i(t=0)}$ AN : $R_1 = \dfrac{4}{8.10^{-5}}$

$\underline{\underline{R_1 = 50\ k\Omega}}$

* A l'intersect° de l'asymptote horizontale et de la tangente à l'origine : $\tau = 3.10^{-4}s$

$\Rightarrow C = \dfrac{\tau}{R_1}$ AN : $C = \dfrac{3.10^{-4}}{50.10^{3}} = \underline{\underline{6.10^{-9}F}}$

Expérience 2.

- obj : exprimer le gain pour le circuit de la question simple.

$\underline{i} = \underline{i_1} + \underline{i_2}$ (a)

$\underline{i_1} = jC\omega \underline{u_c}$ (b)

$\underline{i_2} = jC\omega \underline{u_s}$ (c)

$\underline{u_e} = R_1 \underline{i} + \underline{u_c} \Rightarrow \underline{i_1} = \dfrac{\underline{u_e} - \underline{u_c}}{R_1}$ (d)

$\underline{u_c} = R_2 \underline{i_2} + \underline{u_s} = \underline{u_s}(1 + jR_2C\omega)$ (e)

$$(a) \Rightarrow \frac{\underline{u_e} - \underline{u_c}}{R_1} = jC\omega \underline{u_s}(1 + jR_2C\omega) + jC\omega \underline{u_s}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{u_e}}{R_1} - \frac{\underline{u_s}}{R_1}(1 + jR_2C\omega) = 2jC\omega \underline{u_s} - R_2C^2\omega^2 \underline{u_s}.$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{u_e}}{R_1} = \underline{u_s}\left(\frac{1}{R_1} + jC\omega\left(2 + \frac{R_2}{R_1}\right) - R_2C^2\omega^2\right)$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{1 + jC\omega(2R_1 + R_2) - R_1R_2C^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow G = \frac{1}{\sqrt{(1 - R_1R_2C^2\omega^2)^2 + C^2\omega^2(2R_1 + R_2)^2}} \quad (1)$$

- exploitation du graphique et du code Python

  * $f = 740$ Hz : $G_0 = \dfrac{|\underline{u_s}|}{|\underline{u_e}|} = \dfrac{1{,}5}{10} = 0{,}15$ (ligne 5)

  * (1) $\Rightarrow (1 - R_1R_2C^2\omega^2)^2 + C^2\omega^2(2R_1 + R_2)^2 - \dfrac{1}{G_0^2} = 0$

$\Rightarrow$ la ligne 14 définit la fonction dont on va chercher le "zéro" (intersect° avec l'axe des abscisses).

$\Rightarrow$ le programme renvoie donc la valeur de R_2 de ce circuit : $\underline{\underline{R_2 \simeq 108\,900\ \Omega.}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\omega \to 0} G = 1 \\ \lim\limits_{\omega \to +\infty} G = 0\end{array}\right\}$$ filtre passe bas.

on calcule la valeur de G pour $f = 500\,Hz$ et $f = 50\,000\,Hz$

$$G(f = 500\,Hz) = 0{,}88 > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}71$$

$$G(f = 50\,000\,Hz) = 0{,}002 \leq \frac{2}{100}$$

$\Rightarrow$ le filtre construit correspond au cahier des charges.