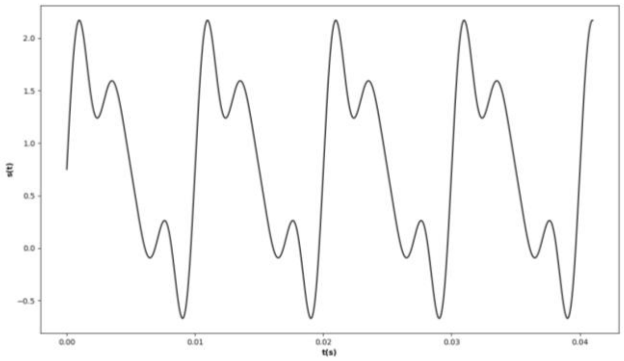
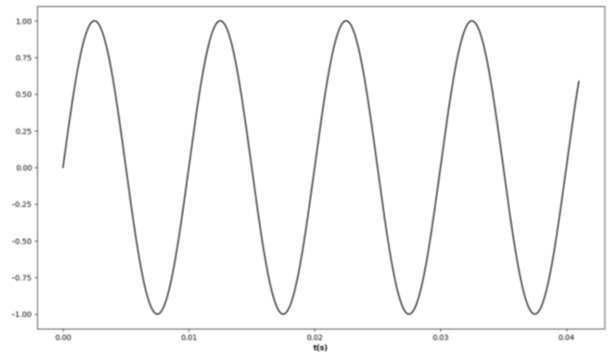
Chapitre 1 : Filtrage linéaire d'un signal

Introduction

s(t)



$\xrightarrow[?]{circuit}$



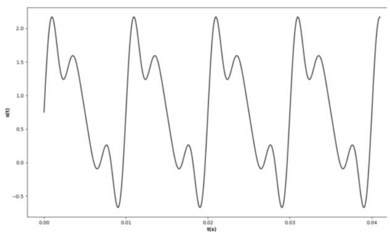
$f = 100\ Hz$ $\qquad$ $f = 100\ Hz$

I. Spectre d'un signal périodique

1. Décomposition d'un signal périodique

- Tout signal périodique peut se décomposer comme une somme de fonctions sinusoïdales et éventuellement d'un terme constant

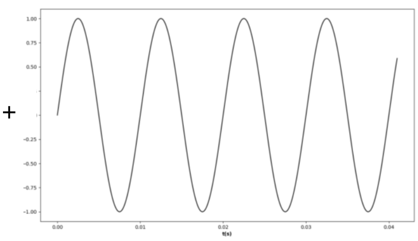
s(t)



$f_0 = 100\ Hz$

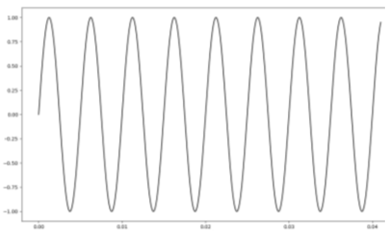
$= 0{,}75 +$

$f_1 = 100\ Hz$

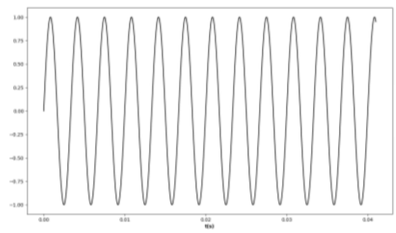


$+\ 0{,}25 \times$

$f_2 = 200\ Hz$

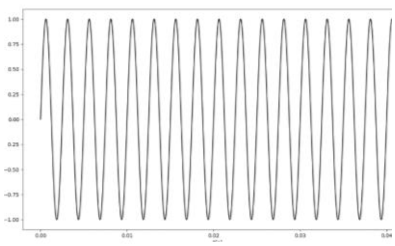


$+\ 0{,}5 \times$



$f_3 = 300\ Hz$

$+\ 0{,}20 \times$



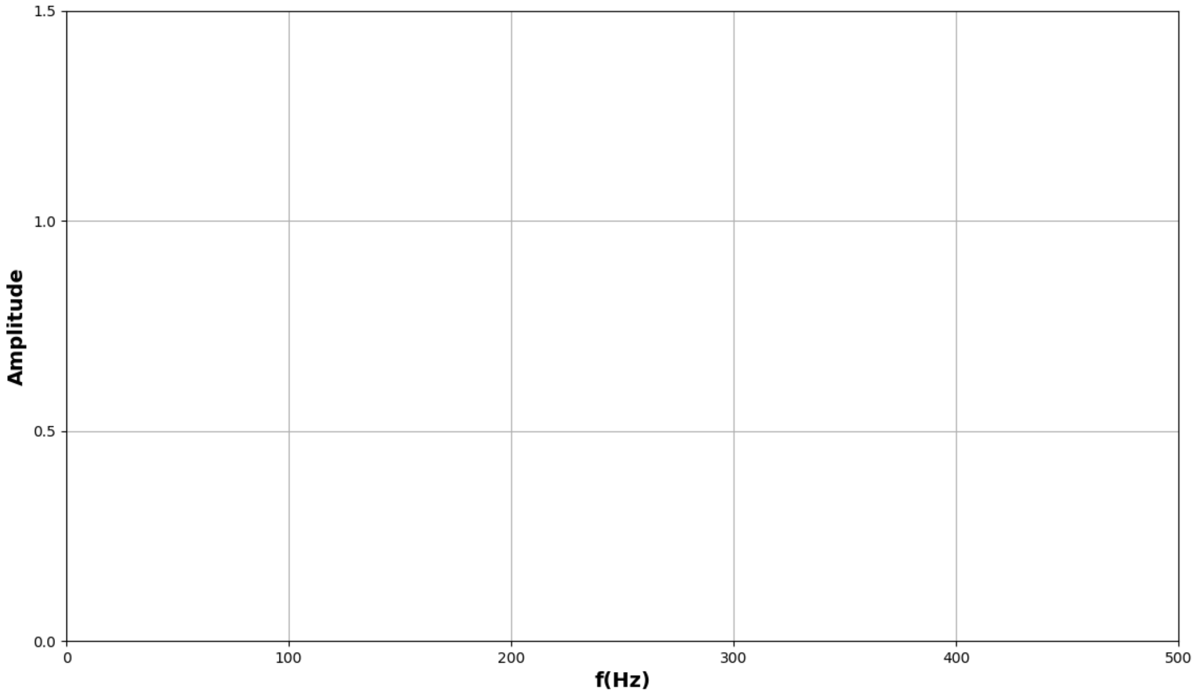
$f_4 = 400\ Hz$

- La décomposition peut faire apparaître un **terme constant** qui correspond à la **valeur moyenne** du signal

- La décomposition fait apparaître un signal appelé **fondamental** ou **harmonique de rang 1**. C'est un signal sinusoïdal de même fréquence $f_1 = f_0$ que le signal périodique

- Les sinusoïdes de fréquence plus élevée $f_n = n \times f_0$, sont appelées les **harmoniques de rang n**.

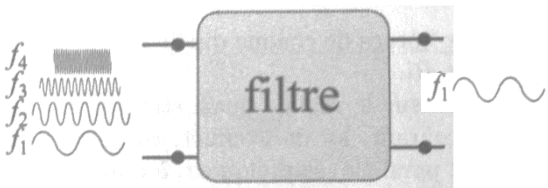
2. Spectre d'un signal périodique



II. Notion de filtrage

1. Définition

<u>Définition :</u> un **filtre linéaire** est un système constitué de **dipôles linéaires** dont l'amplitude du signal de sortie dépend de la pulsation (fréquence) du signal d'entrée.



2. Les différents types de filtre

Exemple :

Donnez les spectres et signaux attendus si le signal s(t) est soumis à un :

1. Filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 150\ Hz$
2. Filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure $f_c = 350\ Hz$
3. Filtre passe-bande idéal de fréquence centrale $f_0 = 200\ Hz$ et de bande-passante $\Delta f = 50\ Hz$

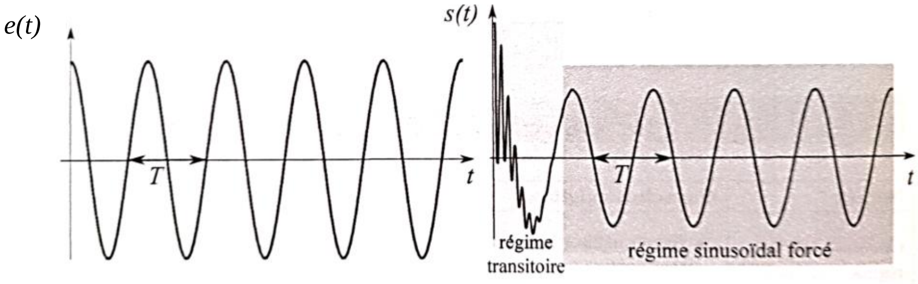
III. Filtre passif d’ordre 1 : réponse du circuit RC à une excitation sinusoïdale

1. Circuit RC – équation différentielle du circuit

2. Notion de régime forcé

- Lors de l'établissement d'un régime sinusoïdal sous l'action d'une source de tension $e(t) = E_m cos(\omega t + \varphi_E)$ (ou de courant), φ_E étant généralement pris égal à 0, **<u>il apparaît dans le circuit un régime transitoire qui disparaît très vite</u>**.

  Après ne reste plus, pour tous les intensités et les tensions du circuit ($s(t)$) vont évoluer selon une allure sinusoïdale <u>de même fréquence</u> f, et <u>de même pulsation</u> $\omega = 2\pi f$, que la source : c'est le <u>REGIME SINUSOÏDAL FORCE (RSF)</u>.



> **Toutes les intensités et les tensions du circuit s'écrivent alors sous la forme :**
>
> $s(t) = S_m cos(\omega t + \varphi)$, où S_m est **<u>l'amplitude du signal</u>** et φ le **<u>déphasage</u>** (phase à l'origine) du signal.

- **Rappel :** L'amplitude du signal sinusoïdal (lue sur un oscillogramme) est reliée à sa valeur efficace (mesurée avec un multimètre) par la relation :

$$S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$$

3. Utilisation de la notation complexe

- **<u>Grandeur REELLE ⇒ Grandeur COMPLEXE</u> :**

$$s(t) = S_m cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad \underline{s} = S_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{S_m} e^{j\omega t} \text{ où } \underline{S_m} = S_m e^{j\varphi} \text{ correspond à l'}\underline{\text{amplitude complexe}}.$$

<u>Exemple :</u>

$e(t) = E_m cos(\omega t)$ $\quad\underline{e} =$ $\quad\underline{E_m} =$

$u_c(t) = U_m cos(\omega t + \varphi_u)$ $\quad\underline{u_c} =$ $\quad\underline{U_{cm}} =$

- **<u>Grandeur COMPLEXE ⇒ Grandeur REELLE</u>** : $\boxed{S_m = |\underline{s}| = |\underline{S_m}| \qquad \varphi = arg(\underline{S_m})}$

- **<u>Déphasage d'un signal $s_1(t)$ par rapport à un signal $s_2(t)$:</u>**

$$\varphi_1 - \varphi_2 = arg\left(\frac{\underline{s_1}}{\underline{s_2}}\right) = arg\left(\frac{\underline{S_{m1}}}{\underline{S_{m2}}}\right) = arg(\underline{s_1}) - arg(\underline{s_2}) = arg(\underline{S_{m1}}) - arg(\underline{S_{m2}})$$

- **<u>Les lois sur les dipôles R et C ainsi que les lois de Kirchhoff (loi des mailles / loi des nœuds) restent valables avec les grandeurs complexes.</u>**

4. Circuit RC – résolution de l'équation différentielle du circuit en utilisant les notations complexes

5. Fonction de transfert $\underline{H}$

Définition : La **fonction de transfert** H du filtre correspond au rapport :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$$

Remarque : l'**ordre n du filtre** correspond au degré du polynôme en $(j\omega)^n$ du dénominateur de la fonction de transfert.

Circuit RC :

6. Courbe de réponse en gain $G = |\underline{H}|$

Définition : Le module de la fonction de transfert, noté **G**, est appelé **facteur d'amplification** ou **gain du filtre** correspond au **module de la fonction de transfert** :

$$G = |\underline{H}| = \left|\frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}\right| = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{U_{s,eff}}{U_{e,eff}}$$

Circuit RC :

7. Courbe de réponse en phase $\varphi = arg(\underline{H})$

Définition : Le **déphasage entre les signaux d'entrée et de sortie**, noté φ, correspond à **l'argument de la fonction de transfert** :

$$\varphi = \varphi_s - \varphi_e = arg(\underline{H})$$

Circuit RC :

8. Fréquence de coupure f_c

Définition : la **fréquence de coupure f_c** d'un filtre est définie par : $G(f_C) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

Circuit RC :

9. Bande-passante Δf

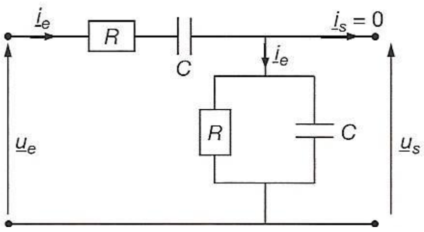
Définition : La **bande-passante** (en fréquences) d'un filtre est l'intervalle de fréquences satisfaisant à :

$$\frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \leq G(f) \leq G_{max}$$

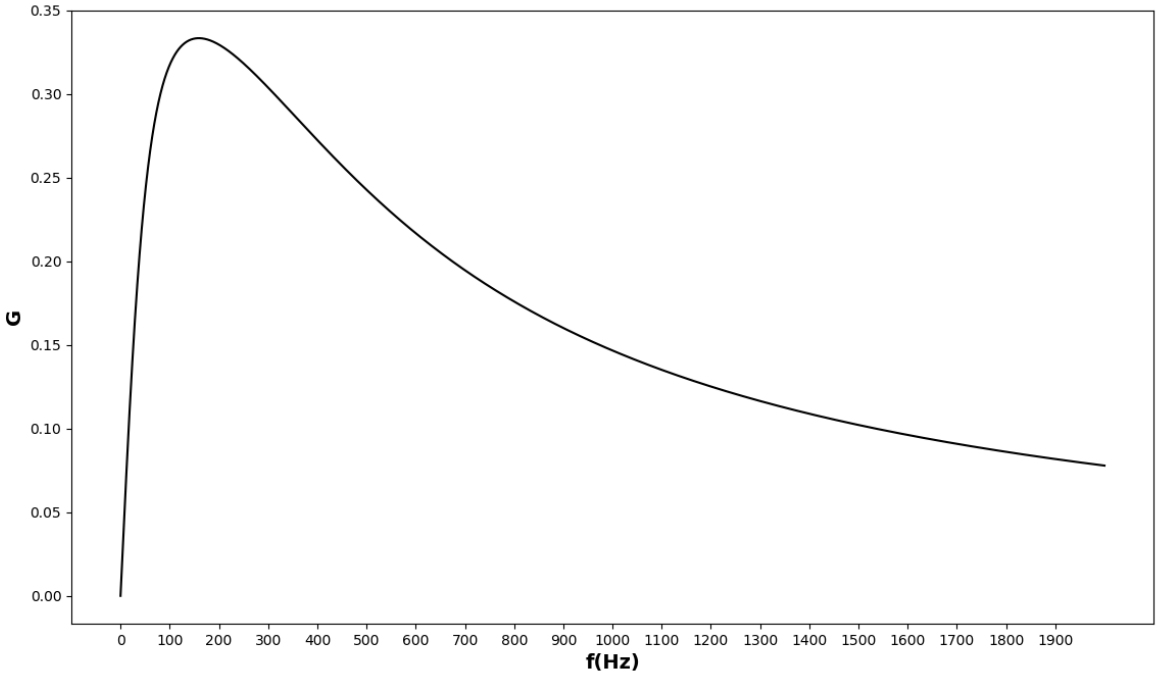
Circuit RC :

IV. Filtre passif d'ordre supérieur à 1

Soit le circuit ci-contre avec $R = 1{,}0\ k\Omega$ et $C = 1{,}0\ \mu\text{F}$:



La courbe de réponse en gain est donnée ci-dessous.



Nature du filtre :

La fonction de transfert de ce filtre s'écrit : $\underline{H} = \frac{1}{3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)}$ avec $x = RC\omega$. Cette expression confirme-t-elle la nature du filtre ?

Bande-passante :

Les questions à se poser à l'issue de ce chapitre

Spectre d'un signal periodique

- Est-ce que je sais passer d'un spectre d'un signal périodique à son expression mathématique et inversement ?

Régime sinusoïdal forcé et notation complexe

- Est-ce que je sais à quoi correspond un régime sinusoïdal forcé ?
- Est-ce que je sais passer de l'expression mathématique d'un signal sinusoïdal à l'expression sous forme complexe ?
- Est-ce que je sais exprimer la dérivée et la dérivée second d'un signal sous forme complexe ?

Filtre

- Est-ce que je connais la fonction d'un filtre ?
- Est-ce que je connais la nature de différents types de filtre ?
- Est-ce que je connais les outils (lois de Kirchhoff et lois sur les dipôles R et C) pour résoudre un circuit en notation complexe ?
- Est-ce que je sais à quoi correspond une fonction de transfert ?
- Est-ce que je sais passer à la réponse en gain et en phase à partir de la fonction de transfert ?
- Est-ce que je sais donner l'allure de la réponse en gain et en phase à partir de leur expression ?
- Est-ce que je connais la définition de la fréquence de coupure ? de la bande-passante d'un filtre ?