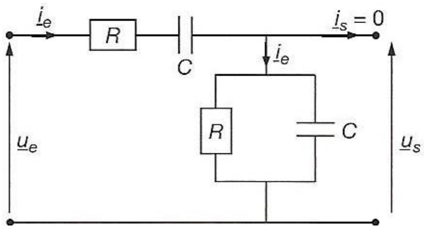
TD Physique n°1 : Filtrage linéaire d'un signal - Correction

Exercice 4 : Fonctions de transfert des filtres d'ordre 2

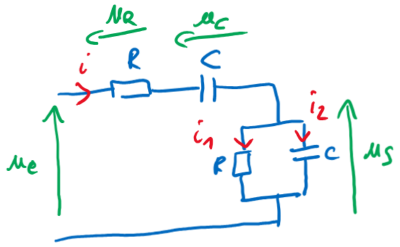
1.



Montrer que la fonction de transfert de ce filtre s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{1}{3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)} \text{ avec } x = RC\omega$$

1.



LDM : $u_e = u_R + u_C + u_S$

Loi sur R : $u_e = Ri + u_C + u_S$

Loi sur C : $u_e = RC\frac{du_C}{dt} + u_C + u_S$

=> RSF $\underline{u_e} = jRC\omega\,\underline{u_C} + \underline{u_C} + \underline{u_S}$

$\underline{u_e} = (1+jRC\omega)\,\underline{u_C} + \underline{u_S}$ (1)

?

Loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$

Loi sur R et C : $C\frac{du_C}{dt} = \frac{u_S}{R} + C\frac{du_S}{dt}$ => RSF $jC\omega\,\underline{u_C} = \frac{\underline{u_S}}{R} + jC\omega\,\underline{u_S}$

=> $\underline{u_C} = \underline{u_S} \times \left[\frac{1}{jRC\omega} + 1\right]$ (2)

(1), (2) => $\underline{u_e} = (1+jRC\omega)\times\left(1+\frac{1}{jRC\omega}\right)\underline{u_S} + \underline{u_S}$

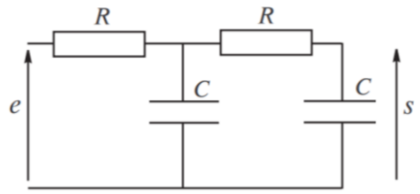
=> $\underline{u_e} = \left(1 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega} + 1\right)\underline{u_S} + \underline{u_S} = \left(2 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)\right)\underline{u_S} + \underline{u_S}$

$(x = RC\omega)$

=> $\underline{u_e} = \left(3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)\underline{u_S}$

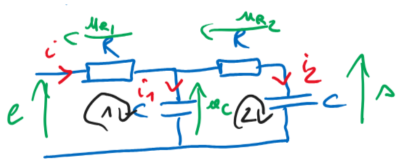
=> $$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{u_S}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)}}$$

2.



Montrer que la fonction de transfert de ce filtre s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 - R^2C^2\omega^2 + j3RC\omega}$$



LDM$_1$: $e = u_{R_1} + u_C$

LDM$_2$: $u_C = u_{R_2} + s$ (1)

$\Rightarrow e = u_{R_1} + u_{R_2} + s$

Loi sur R : $e = Ri + Ri_2 + s$

Loi sur C : $e = Ri + RC\frac{ds}{dt} + s$ $\xRightarrow{RSF}$ $\underline{e} = R\underline{i} + jRC\omega\underline{s} + \underline{s}$ (2)

Loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$

Loi sur R et C : $i = C\frac{du_c}{dt} + C\frac{ds}{dt}$ $\xRightarrow{RSF}$ $\underline{i} = jC\omega\underline{u_c} + jC\omega\underline{s}$ (3)

(2), (3) : $\underline{e} = R[jC\omega\underline{u_c} + jC\omega\underline{s}] + jRC\omega\underline{s} + \underline{s}$ (4)

(1) $\Rightarrow u_c = u_{R_2} + s = Ri_2 + s = RC\frac{ds}{dt} + s$ $\xRightarrow{RSF}$ $\underline{u_c} = jRC\omega\underline{s} + \underline{s}$ (5)

(4), (5) $\Rightarrow$ $\underline{e} = R\left[jC\omega \times (jRC\omega\underline{s} + \underline{s}) + jC\omega\underline{s}\right] + jRC\omega\underline{s} + \underline{s}$

$\underline{e} = \underline{s}\left[1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2\right]$

$\Rightarrow$ $\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 - (RC\omega)^2 + 3jRC\omega}}$

Déphasage : $\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(1) - \arg[1 - (RC\omega)^2 + 3jRC\omega]$

$\varphi = -\arg[1 - (RC\omega)^2 + 3jRC\omega]$

si $1 - (RC\omega)^2 > 0$ $\Rightarrow$ $\varphi = -\arctan\left(\frac{3RC\omega}{1 - (RC\omega)^2}\right)$ (I)

si $1 - (RC\omega)^2 < 0$ $\Rightarrow$ $\varphi = -\arg\left[-1 \times (-1 + (RC\omega)^2 - 3jRC\omega)\right]$

$= -\left[\underbrace{\arg(-1)}_{\pi} + \arg(\underbrace{-1 + (RC\omega)^2}_{>0} - 3jRC\omega)\right]$

$\varphi = -\pi - \arctan\left(\frac{-3RC\omega}{-1 + (RC\omega)^2}\right)$ (II)

Donc : $\omega \to 0$ cas (I) $\varphi \to 0$

$\omega \to +\infty$ cas (II) $\varphi = -\pi - \underbrace{\arctan\left(\underbrace{\frac{-3RC\omega}{-1 + (RC\omega)^2}}_{\to 0^-}\right)}_{\to 0}$

$\Rightarrow \varphi \to -\pi$