Révisions Thermodynamique 1ère année

Problème n°1 : Moteur de Stirling

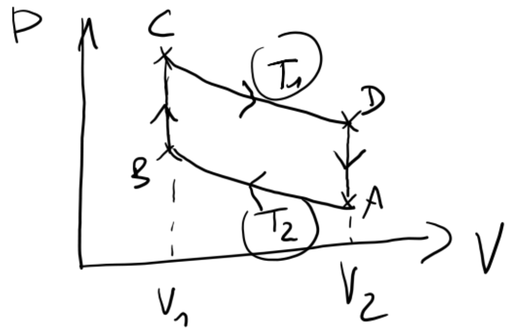
Enoncé :

Un cycle de Stirling est formé de deux isothermes ($T_1 > T_2$) et de deux isochores ($V_1 < V_2$) alternées. Le cycle est supposé réversible ; il est décrit dans le sens moteur par n moles de gaz parfait caractérisé par un coefficient γ supposé constant.

1. Représenter le cycle de Stirling dans le diagramme de Clapeyron.
2. En fonction des températures T_1 et T_2, du taux de compression $a = \frac{V_2}{V_1}$ et de n, R et γ , établir les expressions des quantités de chaleur reçu par le fluide au cours de chacune des étapes.
3. En déduire la quantité de chaleur reçue par le système au cours d'un cycle moteur réversible (notée Q_2) et la quantité de chaleur cédée par le système au cours d'un cycle moteur réversible (notée Q_1).
4. Le rendement de ce moteur se calcule suivant la formule : $\eta = \frac{-W}{Q_2}$. Justifier cette formule et exprimer η.

Correction :

1. Cycle de Stirling :



2. ***A→B : transformation isotherme***

   D'après le 1er principe et la 1ère loi de Joule : $\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB} = \frac{nR}{\gamma-1} \times \Delta T = 0 \Longrightarrow Q_{AB} = -W_{AB} = \int PdV = \int \frac{nRT}{V} dV = nRT_2 ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = -nRT_2 lna$

   B→C : transformation isochore

   $W_{BC} = 0$

   D'après le 1er principe : $\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC} = Q_{BC}$. D'après la 1ère loi de Joule : $\Delta U_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1} \times (T_1 - T_2)$.

   On en déduit : $Q_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1} \times (T_1 - T_2)$

   C→D : transformation isotherme

   De la même manière que ***A→B***, on a : $Q_{CD} = nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT_1 lna$

   D→A : transformation isochore

   De la même manière que ***B→C***, on a : $Q_{DA} = \frac{nR}{\gamma-1} \times (T_2 - T_1)$

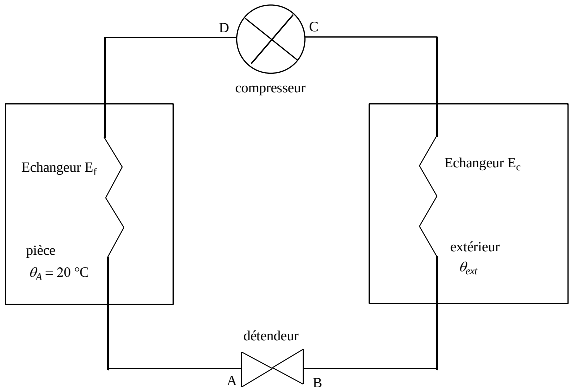
3. Comme $T_1 > T_2$ et $V_2 > V_1$, on a : $Q_2 = Q_{BC} + Q_{CD} > 0$ et $Q_1 = Q_{DA} + Q_{AB} < 0$

4. $\eta = \frac{grandeur\ utile}{grandeur\ coûteuse} = \frac{-W}{Q_2} = \frac{Q_2+Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{\frac{nR}{\gamma-1}\times(T_2-T_1) - nRT_2 lna}{\frac{nR}{\gamma-1}\times(T_1-T_2) + nRT_1 lna} = 1 + \frac{\frac{1}{\gamma-1}\times(T_2-T_1) - T_2 lna}{\frac{1}{\gamma-1}\times(T_1-T_2) + T_1 lna}$

Problème n°2 : Etude d'une pompe à chaleur

Enoncé :

Dans une pièce fermée, on souhaite maintenir une température θ_{amb} = 20 °C tandis que l'air extérieur est à la température θ_{ext} = 0 °C. Pour cela, on considère une pompe à chaleur fonctionnant ainsi :



Le fluide considéré est de l'hélium gazeux assimilé à un gaz parfait.

Caractéristiques de l'hélium :

- capacité thermique massique à pression constante c_p = 5,26 kJ.K^{-1}.kg^{-1} ;
- masse molaire M = 4,0 g.mol^{-1};
- $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$= 1,67.

Le fluide décrit des cycles au cours desquels il subit :

- une détente adiabatique réversible dans le détendeur qui l'amène de l'état A ($\vartheta_A = \vartheta_{amb}$ = 20 °C, P_A = 3,0 bar) à l'état B (T_B, P_B = 2,0 bar) ;
- un réchauffement isobare dans l'échangeur E_c qui amène le fluide dans un état C ($\vartheta_C = \vartheta_{ext}$ = 0 °C, P_C) ;
- une compression adiabatique réversible dans le compresseur qui amène le fluide dans un état D (T_D, P_D) ;
- un refroidissement isobare dans l'échangeur E_f qui ramène le fluide dans l'état A.

Indication : Pour un gaz parfait subissant une transformation réversible adiabatique (= isentropique) de A à B, on peut appliquer les lois de Laplace : $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$ *ou* $P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma$ *ou* $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$

1. Exprimer littéralement les températures T_B et T_D en fonction de T_{amb}, T_{ext}, P_A et P_B. Faire les applications numériques
2. Donner l'allure du cycle en coordonnées (P,V) en précisant le sens de parcours du cycle.
3. Est-ce un cycle moteur ou récepteur ? Que cela signifie-t-il ?
4. Calculer le transfert thermique Q_{BC} reçu par une masse m = 1,0 kg du fluide lors de la traversée de l'échangeur E_c. Commenter le signe.
5. Calculer le transfert thermique Q_{DA} reçu par une masse m = 1,0 kg du fluide lors de la traversée de l'échangeur E_f. Commenter le signe.
6. Calculer le travail W reçu par une masse m = 1,0 kg du fluide lors d'un cycle.
7. Définir l'efficacité e de la pompe à chaleur. La calculer.
8. Quelle est l'efficacité maximale e_{max} que l'on peut obtenir pour une pompe à chaleur fonctionnant avec ces deux mêmes sources de chaleur ? Pourquoi n'est-elle pas atteinte avec la pompe à chaleur étudiée ?

Cette pompe à chaleur sert à compenser les pertes de chaleur de l'habitation maintenue à la température constante égale à T_{amb} = 293 K. La température extérieure est T_{ext} = 273 K.

Dans le but d'évaluer ces pertes thermiques à travers les ouvertures et les parois de la maison, on coupe le chauffage. La température de l'habitation passe alors en une durée de 4,0 heures de T_{amb} à T_2 = 285 K.

On admet que la quantité de chaleur perdue, pendant un intervalle de temps dt s'écrit : $\delta Q = -\,\alpha.C.(T - T_{\text{ext}}).\text{d}t$, où C est la capacité thermique de la maison, α une constante positive et T, la température dans la maison à la date t. On donne : $C = 10^7$ J.K^{-1}.

9. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à la maison, établir l'équation différentielle vérifiée par T, après la coupure du chauffage.
10. Exprimer la température $T(t)$ de la maison à l'instant t en fonction de T_{amb}, T_{ext}, α et t. En déduire alors la valeur de α.

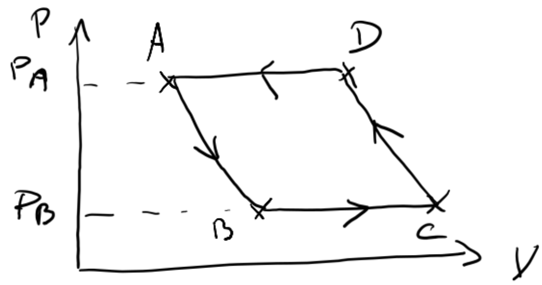
Correction :

1. Le fluide, décrivant les cycles, étant considéré comme parfait, et la transformation $A \rightarrow B$ adiabatique et réversible, on peut appliquer les lois de Laplace : $P_A^{1-\gamma}T_A^{\gamma} = P_B^{1-\gamma}T_B^{\gamma} \Rightarrow T_B = T_A \times \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_{amb} \times \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow A.N.: T_B = 293 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1-1,67}{1,67}} = 249\ \mathrm{K}$

   De même sur l'étape $C \rightarrow D$: $P_C^{1-\gamma}T_C^{\gamma} = P_D^{1-\gamma}T_D^{\gamma} \Rightarrow T_D = T_C \times \left(\frac{P_C}{P_D}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_{ext} \times \left(\frac{P_C}{P_D}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

   Or $P_D = P_A$ et $P_C = P_B$, les transformations $D \rightarrow A$ et $B \rightarrow C$ étant isobares : $T_D = T_{ext} \times \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow A.N.: T_D = 273 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-1,67}{1,67}} = 321\ \mathrm{K}$

2. Allure du cycle en coordonnées (*P*,*V*) :



3. Le cycle dans les coordonnées (*P*,*V*) est orienté dans le sens anti-horaire, il correspond donc à un cycle récepteur. Cela signifie que sur le cycle le fluide reçoit de l'énergie de la part de l'extérieur.
4. La transformation $B \rightarrow C$ étant isobare, alors on a : $\Delta H_{B\rightarrow C} = Q_{BC}$. Et, d'après la 2[nde] loi de Joule, on obtient :
   $\Delta H_{B\rightarrow C} = Q_{BC} = mc_P\Delta T = mc_P(T_C - T_B) \Rightarrow A.N.: Q_{BC} = 1,0 \times 5,26 \times (273 - 249) = 126\ \mathrm{kJ} > 0$: cette quantité de chaleur étant positive, elle est reçue par le fluide, de la part de la source froide (ici l'atmosphère extérieure).
5. De la même manière qu'à la question précédente : $\Delta H_{D\rightarrow A} = Q_{DA} = mc_P\Delta T = mc_P(T_A - T_D) \Rightarrow A.N.: Q_{DA} = 1,0 \times 5,26 \times (293 - 321) = -147\ \mathrm{kJ} < 0$: cette quantité de chaleur étant négative, elle est cédée par le fluide, à la source chaude (ici la pièce à chauffer).
6. D'après le 1[er] principe de la thermodynamique appliqué sur le cycle : $\Delta U = 0 = W + Q = W + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = W + Q_{BC} + Q_{DA}$ puisque $Q_{AB} = Q_{CD} = 0$, les étapes $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$ étant adiabatiques. On en déduit : $W = -(Q_{BC} + Q_{DA}) \Rightarrow A.N.: W = -(Q_{BC} + Q_{DA}) = 21,0\ kJ$
7. $e = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur coûteuse}} = \frac{-Q_C}{W} = \frac{-Q_{DA}}{W} \Rightarrow A.N.: e = 7,0$
8. L'efficacité s'écrit : $e = \frac{-Q_{DA}}{W}$ avec : $W = -(Q_{BC} + Q_{DA})$ et donc : $e = \frac{Q_{DA}}{Q_{DA}+Q_{BC}}$

   L'efficacité maximale *e*e_{max} est obtenue en considérant le cycle réversible.

   En appliquant le 2[nd] principe de la thermodynamique sur un cycle : $\Delta S = 0 = S_e + S_c = \frac{Q_{DA}}{T_{amb}} + \frac{Q_{BC}}{T_{ext}} + S_c = \frac{Q_{DA}}{T_{amb}} + \frac{Q_{BC}}{T_{ext}}$.

   Si le cycle est réversible ($S_C = 0$). On en déduit : $\frac{Q_{DA}}{T_{amb}} + \frac{Q_{BC}}{T_{ext}} = 0 \Rightarrow Q_{BC} = -\frac{T_{ext}}{T_{amb}}Q_{DA}$.

   On obtient donc : $e \frac{Q_{DA}}{Q_{DA}+Q_{BC}} \frac{Q_{DA}}{Q_{DA}-\frac{T_{ext}}{T_{amb}}Q_{DA}} \frac{1}{1-\frac{T_{ext}}{T_{amb}}} \frac{T_{amb}}{T_{amb}-T_{ext}} \frac{293}{293-273}_{max}\ _{max}$.

   Cette efficacité n'est pas atteinte avec la pompe à chaleur étudiée car les étapes isobares ne sont pas réversibles.

9. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à la maison : $dU = \delta Q + \delta W$. Or la maison pouvant être considérée comme un solide incompressible on a : $dU = CdT = \delta Q = -\alpha.C.(T - T_{ext}).dt$.

   L'équation différentielle vérifiée par *T* est donc : $CdT = -\alpha.C.(T - T_{ext}).dt \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_{ext}) \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \alpha T = \alpha T_{ext}$

10. Résolution de l'équation différentielle précédente : $T = T_{ext} + K\,exp(-\alpha t)$. En utilisant la condition initiale :
    $T_{amb} = T_{ext} + K \Rightarrow K = T_{amb} - T_{ext}$. On en déduit : $T = T_{ext} + (T_{amb} - T_{ext}) \times exp(-\alpha t)$.

    Au bout de $t_2 = 4h$, $T = T_2$, on en déduit l'expression puis la valeur de α :

$$T_2 = T_{ext} + (T_{amb} - T_{ext}) \times exp(-\alpha t_2) \Rightarrow exp(-\alpha t_2) = \frac{T_2 - T_{ext}}{T_{amb} - T_{ext}}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{t_2} ln\left(\frac{T_2 - T_{ext}}{T_{amb} - T_{ext}}\right) \Rightarrow A.N.: \alpha = -\frac{1}{4 \times 3600} ln\left(\frac{285 - 273}{293 - 273}\right) = 3,5 \times 10^{-5}\ s^{-1}$$