TD Physique n°4 : Phénomènes de transport – Conduction thermique

Exercice 1 : La température du mouton

On va rechercher l'évolution de la température corporelle d'une brebis au cours du temps. Pour cela, une toison de laine va être caractérisée par une valeur de conductivité thermique λ_{laine} supposée homogène et une valeur de capacité thermique massique c_{laine}. On considèrera par la suite une laine « moyenne » caractérisée par une conductivité thermique $\lambda_{laine} = 0{,}040\ W.m^{-1}.K^{-1}$.

Introduction

On considère un parallélépipède, de longueur L, de hauteur H et d'épaisseur e petite (e << min(L, H)), constitué d'un matériau homogène de conductivité λ (**figure 1**). Ce matériau est en présence de thermostats qui imposent à tout moment une température $T_{entrée}$ en z = 0 et $T_{sortie} < T_{entrée}$ en z = e. Ce matériau est parcouru par un flux thermique ϕ_{th} axial constant suivant l'axe (Oz).

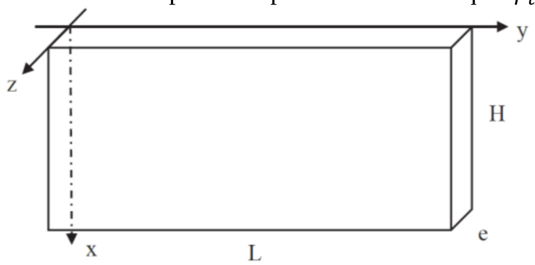


Figure 1 - Géométrie du conducteur thermique

1. Définir puis établir l'expression de la résistance thermique R_{th} du matériau en fonction de e, λ, H et L.

Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

On modélise la brebis debout par un parallélépipède plein, de température uniforme $\theta_{eq} = 39°C$, de longueur $L = 100\ cm$ et de section carrée de côté $H = 30\ cm$. Le corps de la brebis est entouré d'une épaisseur qui peut varier de $e = e_M = 10cm$ de laine avant la tonte à $e = e_m = 5cm$ après la tonte. La situation est représentée en **figure 3** et en **figure 4**. On se place en régime permanent.

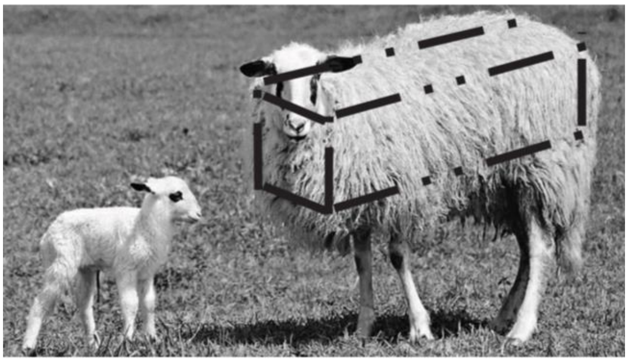


Figure 3 - Modélisation de la brebis

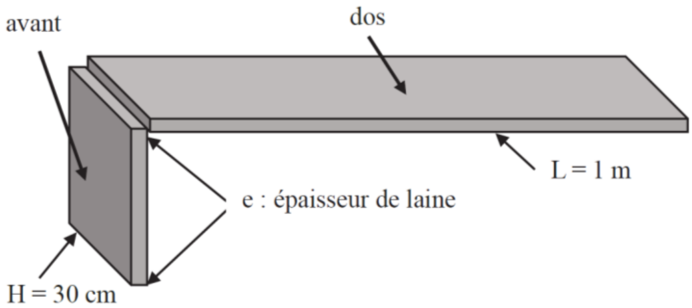


Figure 4 - Modélisation de la toison
Seules les parties lainières du dos et de l'avant ont été schématisées.

2. Exprimer la résistance R_{diff} de cette carapace de laine, en fonction de L, H, e et λ_{laine}. Évaluer son ordre de grandeur pour les deux épaisseurs limites.

On doit tenir compte de deux autres phénomènes d'échanges thermiques : la conducto-convection (d'autant plus importante que le vent est fort) et le rayonnement thermique. Ces deux phénomènes ont lieu depuis la surface extérieure de la brebis. On donne la résistance de conducto-convection $R_{cc} = 0{,}18\ K.W^{-1}$ ainsi que la résistance thermique de rayonnement $R_r = 0{,}145\ K.W^{-1}$.

3. Faire un schéma du montage des trois résistances R_{diff}, R_{cc} et R_r placées entre la température interne de la brebis $T_{int} = \theta_{eq} = 39°C$ et la température de l'air T_{air}. Évaluer numériquement les deux valeurs R_1 et R_2 des résistances équivalentes de la brebis non tondue et de la brebis tondue.

La brebis non tondue est dans un confort climatique pour la température de l'air égale à $T_0 = 5°C$. En plus des phénomènes de diffusion, conducto-convection et rayonnement, il y a évaporation d'eau par sudation. La brebis émet de la vapeur d'eau par les voies respiratoires <u>en toute situation</u> : m = 5,8 10^{-6} g s^{-1}. Elle en émet deux fois plus par sa surface cutanée quand elle vient d'être tondue : m′ = 2m et que la température extérieure est supérieure à 5,1 °C. L'enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau, supposée indépendante de la température, vaut $\Delta H^0_{vap} = 2500\ kJ.kg^{-1}$.

4. En déduire la puissance p_{m0} apportée à la brebis par son métabolisme dans une situation de confort juste avant la tonte. On l'exprimera en fonction de m, ΔH^0_{vap}, R_1, T_{int} et T_{air}, puis on en fera l'évaluation numérique pour $T_{air} = T_0 = 5°C$.

5. Répondre à la même question pour la brebis juste après la tonte pour la température de confort $T_0 = 5°C$.

Déséquilibre thermique d'une brebis (situations de stress et de danger)
La thermorégulation est due à des productions internes de chaleur (thermogenèse liée au métabolisme et à l'activité physique) et à des déperditions de chaleur au niveau de la respiration et de la peau (thermolyse). Dans une situation où l'air environnemental est en dehors de la zone de confort, la brebis va se réchauffer ou se refroidir et éventuellement transpirer. On négligera la capacité thermique de la toison devant celle du corps de la brebis. On assimile la brebis à un volume d'eau de masse volumique $\mu = 1000 kg.m^{-3}$ et de capacité thermique massique $c = 4200 K.K^{-1}.kg^{-1}$. On admet que les variations de température sont suffisamment lentes pour utiliser les notions de résistances. On note p_m la puissance apportée par le métabolisme.

6. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à la brebis non tondue dans une situation (1) où la température T_{air} de l'environnement est différente de $T_0 = 5°C$, montrer que l'équation différentielle relative à la température $T(t)$ de la brebis s'écrit : $\frac{dT(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_1}(T(t) - T_{air}) = \frac{T_1 - T_{air}}{\tau_1}$
   On exprimera τ_1 en fonction de μ, c, L, H, R_1 et $(T_1 - T_{air})$ en fonction de θ_{eq}, T_0, R_1 et $(p_m - p_{m0})$
7. Calculer τ_1. Calculer T_1 en °C pour $p_m = p_{m0}$ avec une température d'environnement égale à $T_{air} = 17°C$.

1 : Voir cours ; 2 : remarquer qu'il y a en tout 6 faces à considérer et que les résistances thermiques doivent ici être associées en dérivation ; 3 : R_{diff} + (R_r//R_{cc}) ; 4 et 5 : réaliser un bilan thermique sur la brebis en régime permanent et en déduire une égalité en flux ; 6 : voir cours de 1ère année (conduction thermique // premier principe pour un système incompressible indilatable) et l'appliquer au cas d'étude

Exercice 2 : Mise en chambre d'un vin en bouteille

Une bouteille de vin, choisie dans la cave à une température de T_0 = 8,0°C est mise « en chambre » dans la cuisine dont la température vaut T_A = 22°C.
La bouteille est assimilée à un cylindre de hauteur H = 19,5 cm, de diamètre d= 7,6 cm et d'épaisseur e = 3mm. Dans cette modélisation, les échanges thermiques entre l'extérieur et le vin se font uniquement par la surface latérale de la bouteille.
Par ailleurs, la température T(t) du vin est supposée uniforme, mais dépend lentement du temps ; celle du verre, en revanche, est fonction de r (distance à l'axe des coordonnées cylindriques) et le régime est quasi-stationnaire.

Données : *conductivité thermique du verre : λ = 0,78 $W.m^{-1}.K^{-1}$*
coefficient d'échange convectif : h = 10 (USI)
capacité thermique massique du vin : c= 4,0 $kJ.kg^{-1}.K^{-1}$

1. Quel est le signe du flux thermique Φ qui traverse la bouteille suivant $\overrightarrow{u_r}$?

2. Calculer la résistance thermique R_{cond} de conduction de la partie latérale de la bouteille, en notant T_S la température en surface de la bouteille. Réaliser l'application numérique.

3. L'échange thermique par convection entre l'air ambiant et la bouteille est bien représenté par la loi de Newton : $\varphi = hS(T_S - T_A)$ où le coefficient d'échange thermique h est considéré comme constant et uniforme sur toute la surface S et φ est le flux thermique dans l'air. Quelle est l'unité de h ? Exprimer la résistance thermique de convection R_{conv} de la surface latérale de la bouteille en fonction des données. Réaliser l'application numérique.

4. Donner la valeur numérique de la résistance thermique totale R_{th} d'échange entre le vin et l'air extérieur.

5. Réaliser un bilan énergétique sur le vin dans la bouteille afin d'obtenir une équation différentielle vérifiée par T(t).

6. Exprimer puis calculer le temps nécessaire pour que le vin atteigne sa température optimale de dégustation T_D = 16°C.

1 : le flux est ici <0 ; 2 : appliquer le cours dans le cas d'une géométrie cylindrique en remarquant que $S = 2\pi rH$ dépend de r donc l'intégration va changer ; 3 : se baser sur le lien entre flux et résistance ; 4 : remarquer que les deux résistances précédentes s'associent en série ; 5 : voir cours de 1ère année (conduction thermique // premier principe pour un système incompressible indilatable) et l'appliquer au cas d'étude

Exercice 3 : Température cutanée d'un mammifère

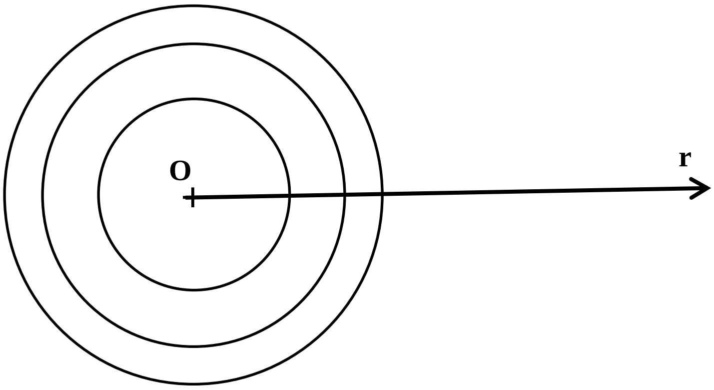
Enoncé

Un mammifère marin peut être sommairement schématisé par une sphère de muscles de centre O et de rayon R, dont le métabolisme dégage une puissance thermique volumique φ_0, uniformément dans tout son volume.
L'animal est plongé dans un fluide (eau ou air) de conductivité thermique λ_{eau} ou λ_{air}. La température très loin du mammifère est la température ambiante soit $T_0 = 293K$.

1. Déterminer la puissance thermique Φ dégagée par le mammifère en fonction de R et de φ_0.
2. En raisonnant sur un système compris entre deux sphères concentriques de rayons r et r + dr, justifier que la puissance thermique Φ se conserve pour r > R.
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température T(r) pour r > R.
4. Montrer que la solution de l'équation différentielle s'écrit : $T(r) = T_0 + \frac{a}{r}$. On exprimera la constante *a* en fonction de R, λ et φ_0.
5. Calculer la température cutanée, T_C, de l'animal.
6. Déterminer les valeurs de φ_0 pour avoir une température T_C = 303 K dans l'eau puis dans l'air. On donne : λ_{eau} = 500 SI, λ_{air} = 5 SI et R = 25 cm. Ces valeurs permettent d'avoir un rapport surface/volume voisin de celui d'un être humain.

Correction

- **Schéma :**



1. *Déterminer la puissance thermique Φ dégagée par le mammifère en fonction de R et de φ_0.*

$$\boldsymbol{\phi = \varphi_0} \times$$

2. *En raisonnant sur un système compris entre deux sphères concentriques de rayons r et $r + dr$, justifier que la puissance thermique Φ se conserve pour r > R.*

- **Système d'étude :**

- **Quantité de chaleur algébrique entrante en r par conduction thermique** : δQ_e

Quantité de chaleur algébrique sortante en r+dr par conduction thermique : δQ_s

- **Bilan d'énergie en régime stationnaire :**

- **Conclusion sur le flux (ou puissance thermique) $\boldsymbol{\Phi_{th}}$:**

3. *En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température T(r) pour r > R.*

- **Loi de Fourier :**

- **Equation différentielle en $\boldsymbol{T}$:**

4. *Montrer que la solution de l'équation différentielle s'écrit :* $T(r) = T_0 + \frac{a}{r}$*. On exprimera la constante a en fonction de R,* λ *et* φ_0.

- **Solution de l'équation différentielle :**

- **Conditions aux limites :**

- **Expression finale de $\boldsymbol{T(r)}$:**

5. *Calculer la température cutanée,* T_C*, de l'animal.*

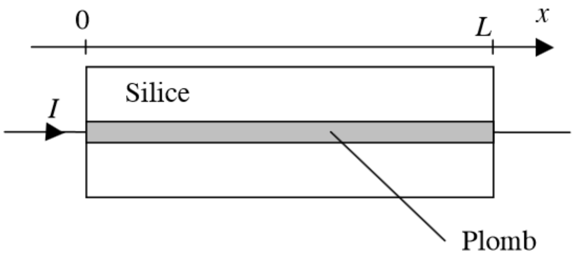
$\boldsymbol{T = T_C}$ pour $\boldsymbol{r} =$ $\Longrightarrow$

6. *Déterminer les valeurs de* φ_0 *pour avoir une température TC = 303 K dans l'eau puis dans l'air. On donne :* λ_{eau} *= 500 SI,* λ_{air} *= 5 SI et R = 25 cm. Ces valeurs permettent d'avoir un rapport surface/volume voisin de celui d'un être humain.*

$$\boldsymbol{\varphi_0} =$$

AN : $\varphi_{0,eau} = 2{,}4 \times 10^5\ W.m^{-3}$ $\varphi_{0,air} = 2{,}4 \times 10^3\ W.m^{-3}$

Exercice 4 : Etude d'un fusible en régime permanent



- *Un fusible est constitué par un fil conducteur en plomb cylindrique homogène de longueur utile L et de section droite S.*
- *Il possède une conductivité électrique σ et une conductivité thermique λ. Il est traversé par un courant d'intensité constante I.*
- *Ce fil est enfermé dans une gaine en silice assurant une isolation thermique et électrique parfaite.*
- *Les températures en x = 0 et x = L sont imposées, et égales à la température T_0 du milieu ambiant.*
- *On suppose le régime stationnaire établi.*

Données :

I_{max} = 10,0 A ; T_0 = 300 K ; σ = $5{,}00.10^6$ $\Omega^{-1}m^{-1}$; λ = 35 $W.m^{-1}K^{-1}$; L = 3,0 cm. Température de fusion du plomb : T_{fus}=600K.

1. On indique que la résistance électrique R du fil s'écrit : $R = \frac{\sigma L}{S}$.

a. En déduire l'expression de la puissance électrique reçue par ce fil, en fonction de σ, L, S et I.

b. En déduire la puissance électrique reçue par une tranche d'épaisseur *dx* du fil électrique, en fonction de σ, dx, S et I.

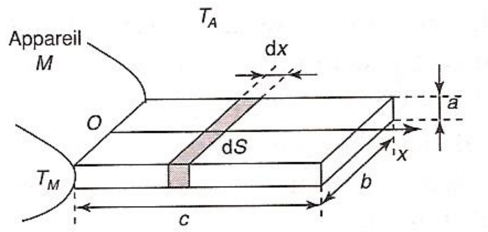
2. **a.** A partir d'un bilan énergétique établi localement, établir l'équation différentielle vérifiée par la température dans le fil.

b. Donner l'expression littérale de T(x).

c. Déterminer le rayon *a* du fil pour que le fusible admette une intensité maximale de 10A.

1a : puissance dissipée par effet Joule ; 1b : il suffit de remplacer dans l'expression précédente L par dx ; 2a : voir cours pour la méthode sachant qu'il y a ici en plus de la conduction thermique une puissance apportée par effet Joule au fil (elle échauffe le fil) ; 2b : résoudre l'équation différentielle établie en 2a

Exercice 5 : Etude d'une ailette de refroidissement



- *Pour éviter un échauffement trop important d'un appareil M, on munit son boîtier d'ailettes de refroidissement métalliques. Chaque ailette est parallélépipédique, de dimensions : épaisseur : a = 2,0 mm ; largeur : b = 10 cm ; longueur : c = 20 cm. On pourra admettre que a négligeable devant b et donc c.*
- *En fonctionnement, le boîtier de l'appareil sera maintenu à la température T_M = 60°C. L'air extérieur, qui circule, est de température constante et uniforme T_A = 20°C.*
- *Dans l'ailette, on admettra que le transfert thermique, de type conductif, peut être considéré unidimensionnel dans la direction de l'axe (Ox). La conductivité du matériau constituant l'ailette est : λ = 16 $W.K^{-1}.m^{-1}$*
- *Par ailleurs, il existe aussi un transfert convectif. L'expression générale du flux de chaleur convectif φ, autour d'un solide à la température T_{solide} au contact d'un fluide à la température T_{fluide}, est donnée par la* ***loi de Newton*** *:*
$$\varphi = hS(T_{fluide} - T_{solide})$$
où S est la surface du solide en contact avec le fluide, et h, le coefficient d'échange. On prendra $h = 150$ (SI).
- *On se place à présent en* ***régime permanent***.

1. Montrer que la température *T(x)* est solution de l'équation différentielle suivante : $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{L^2}(T - T_A) = 0$. On donnera l'expression et la valeur numérique de *L*.

2. Montrer alors que : $T = T_A + (T_M - T_A)e^{-\frac{x}{L}}$.

1 : appliquer la même méthode que dans l'exercice d'application du cours et que dans l'exercice précédent en introduisant la puissance dissipée (donc négative) par convection ; 2 : intégrer l'équation en écrivant au préalable l'équation caractéristique

Exercice 6 : Réacteur nucléaire

Enoncé

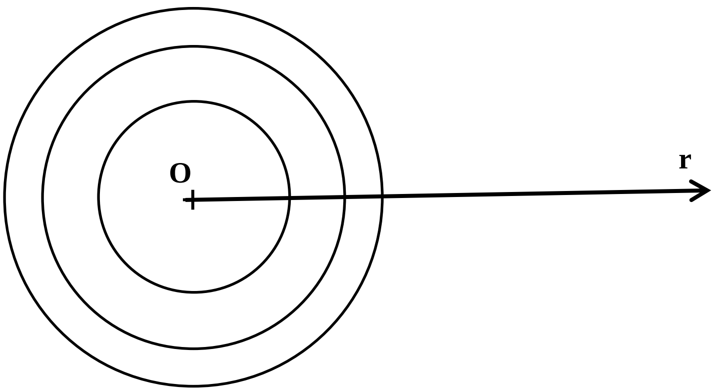
Dans un réacteur nucléaire, le combustible est de l'uranium, enfermé dans une gaine en zirconium, cylindrique de rayon R = 1cm, de longueur L = 4 m et d'épaisseur négligeable. L'ensemble uranium-gaine constitue un « crayon ». L'uranium contenu dans chaque « crayon » dégage une puissance volumique φ *= 200 MW.m*$^{-3}$*. La température extérieure d'un « crayon » est maintenue constante à* T_e *= 600 K, et on se place en régime permanent, à savoir qu'en tout point M du « crayon », la température ne dépend plus du temps. On suppose également qu'elle dépend uniquement de la distance r = OM du point M à l'axe du cylindre.*

1. Établir, à partir d'un bilan thermique dans la couche d'uranium de rayon r, l'équation différentielle vérifiée par T(r). On montrera qu'elle se met sous la forme $\frac{dT}{dr} = -Ar$, où A est une constante à déterminer. Pour la suite, on prendra $A = 3{,}33 \times 10^7$ m^2K.
2. Déterminer la loi T(r) en fonction de R, φ, λ et r.
3. Calculer la température maximale d'un barreau.
4. La température de fusion du combustible est T_f = 2900K. Quelle est la valeur limite R_{lim} du rayon du cylindre au-delà de laquelle la fusion du combustible risque d'intervenir ? La valeur de R = 1 cm est-elle bien choisie ?

Correction

1. *Établir, à partir d'un bilan thermique dans la couche d'uranium de rayon r, l'équation différentielle vérifiée par T(r). On montrera qu'elle se met sous la forme* $\frac{dT}{dr} = -Ar$*, où A est une constante à déterminer. Pour la suite, on prendra* $A = 3{,}33 \times 10^7$ m^2K.

- **Schéma (vue de dessus) :**



- **Système d'étude :**

- **Quantité de chaleur algébrique entrante en r par conduction thermique** : δQ_e

  Quantité de chaleur algébrique sortante en r+de par conduction thermique : δQ_s

  Quantité de chaleur apportée par la réaction nucléaire : δQ_a

  Indication : le volume compris entre deux cylindres imbriqués de hauteur H *et de rayons respectifs* r *et* $r + dr$ *vaut :*

$$dV = 2\pi r H dr$$

- **Bilan d'énergie en régime stationnaire :**

- **Equation différentielle en Φ_{th} :**

- **Loi de Fourier :**

- **Equation différentielle en T :**

2. *Déterminer la loi T(r) en fonction de R, φ, λ et r.*

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\varphi}{2\lambda}\, r \Rightarrow$$

3. *Calculer la température maximale d'un barreau.*

Pour $T = T_{max}$: $\frac{dT}{dr} =$

$\Rightarrow$

4. *La température de fusion du combustible est Tf = 2900K. Quelle est la valeur limite R_{lim} du rayon du cylindre au-delà de laquelle la fusion du combustible risque d'intervenir ? La valeur de R = 1 cm est-elle bien choisie ?*

Pour $R = R_{lim}$: $T_{max} =$ $\Rightarrow$