

**TD Physique n°5 : Approche énergétique du mouvement d'un point matériel - Correction**

**Exercice n°1 : Skieur sur une pente**

1. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

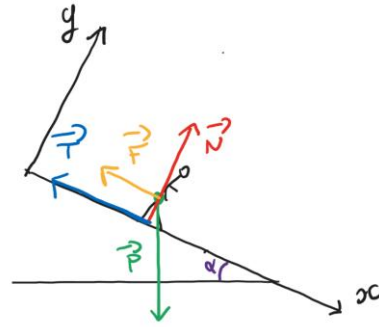
**Système** : skieur de masse  $m$  assimilé à un point matériel

**Forces extérieures** s'exerçant sur le skieur :

$$\text{Poids : } \vec{P} = m\vec{g}$$

$$\text{Force de frottement : } \vec{F} = -\lambda\vec{v}$$

$$\text{Réaction du support : } \vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$



**Principe fondamental de la dynamique (PFD)** :  $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{N}$

Projection sur l'axe (Oy) :  $0 = -mg\cos\alpha + \|\vec{N}\| \Rightarrow \|\vec{N}\| = mg\cos\alpha$   $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = fmg\cos\alpha$

2. Projection sur l'axe (Ox) :  $ma_x = m\dot{v}_x = +mgsin\alpha - \|\vec{T}\| - \lambda v_x = m\dot{v}_x = +mgsin\alpha - fmg\cos\alpha - \lambda v_x$

Or  $\dot{v}_x = v \Rightarrow m\dot{v} = +mgsin\alpha - fmg\cos\alpha - \lambda v \Rightarrow \dot{v} + \frac{\lambda}{m}v = g(sin\alpha - f\cos\alpha)$

Solution générale de l'équation différentielle :  $v(t) = Ae^{-\frac{\lambda}{m}t} + \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda}$

Condition initiale :  $v(t=0) = 0 \Rightarrow A + \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} = 0 \Rightarrow A = -\frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda}$

Bilan :  $v(t) = \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} \times \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} \times \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) \Rightarrow x(t) = \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} \times \left(t + \frac{m}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) + B$$

Condition initiale :  $x(t=0) = 0 \Rightarrow \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} \times \frac{m}{\lambda} + B \Rightarrow B = -g(sin\alpha - f\cos\alpha) \times \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2$

Bilan :  $x(t) = \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} \times \left(t + \frac{m}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) - g(sin\alpha - f\cos\alpha) \times \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} \times \left[t + \frac{m}{\lambda} \left(e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1\right)\right]$$

3.  $v_{lim} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda}$  AN :  $v_{lim} = 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

4.  $v(t_1) = \frac{v_{lim}}{2} \Rightarrow v_{lim} \times \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t_1}\right) = \frac{v_{lim}}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\frac{\lambda}{m}t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\lambda}{m}t_1 = -\ln 2 \Rightarrow t_1 = \frac{m}{\lambda} \ln 2$

AN :  $t_1 = 6,3 \text{ s}$

5. Nouvelle origine des temps et de l'axe à partir de la chute :  $x(t=0) = 0$  et  $v(t=0) = \frac{v_{lim}}{2}$

PFD :  $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$

Projection sur (Ox) :  $m\ddot{x} = +mgsin\alpha - 20fmg\cos\alpha \Rightarrow \ddot{x} = gsin\alpha - 20fg\cos\alpha$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = (gsin\alpha - 20fg\cos\alpha) \times t + A'$

Condition initiale :  $\dot{x}(t=0) = v(t=0) = \frac{v_{lim}}{2} = A'$

Bilan :  $\dot{x}(t) = (gsin\alpha - 20fg\cos\alpha) \times t + \frac{v_{lim}}{2}$

$$\Rightarrow x(t) = (gsin\alpha - 20fg\cos\alpha) \times \frac{t^2}{2} + \frac{v_{lim}}{2}t + B'$$

Condition initiale :  $x(t=0) = 0 \Rightarrow B' = 0$

Bilan :  $x(t) = (gsin\alpha - 20fg\cos\alpha) \times \frac{t^2}{2} + \frac{v_{lim}}{2}t$

Le skieur s'arrête au temps  $t_2$  lorsque :  $\dot{x}(t=t_2) = 0 \Rightarrow (gsin\alpha - 20fg\cos\alpha) \times t_2 + \frac{v_{lim}}{2} = 0$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{v_{lim}}{2} \frac{1}{20fg\cos\alpha - gsin\alpha}$$

On en déduit la distance d'arrêt :  $x(t=t_2) = (gsin\alpha - 20fg\cos\alpha) \times \frac{v_{lim}^2}{8} \times \left(\frac{1}{20fg\cos\alpha - gsin\alpha}\right)^2 + \frac{v_{lim}^2}{4} \frac{1}{20fg\cos\alpha - gsin\alpha}$

$x(t=t_2) = \frac{v_{lim}^2}{8} \times \frac{1}{20fg\cos\alpha - gsin\alpha}$  AN :  $x(t=t_2) = 650 \text{ m}$

## Exercice n°2 : Constante de raideur d'un ressort

### Méthode n°1 : Etude du ressort à l'équilibre

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Système : masse  $m$  suspendue au ressort assimilé à un point matériel

Forces extérieures s'exerçant sur la masse  $m$  :

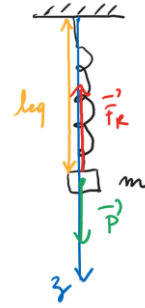
$$\text{Poids : } \vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$$

$$\text{Force de rappel du ressort : } \vec{F}_R = -k \times (\ell - \ell_0)\vec{u}_z$$

A l'équilibre :

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{F}_R = \vec{0} &\Rightarrow +mg - k \times (\ell_{eq} - \ell_0) = 0 \Rightarrow k \times (\ell_{eq} - \ell_0) = mg \Rightarrow \ell_{eq} \\ &= \ell_0 + \frac{g}{k} \times m \end{aligned}$$

Il suffit alors de déterminer pour plusieurs masses différentes  $m$ , plusieurs longueurs à l'équilibre  $\ell_{eq}$  et de tracer  $\ell_{eq}$  en fonction de  $m$ . Le coefficient directeur de la droite obtenue, égal à  $\frac{g}{k}$ , permet d'obtenir  $k$ .



### Méthode n°2 : Etude du ressort en mouvement (hypothèse de l'oscillateur harmonique)

Principe fondamental de la dynamique (PFD) :  $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_R$  en considérant que les forces de frottement sont négligeables

En projection sur l'axe (Oz) vertical descendant (voir schéma) :  $m\ddot{z} = mg - k \times (\ell - \ell_0)$

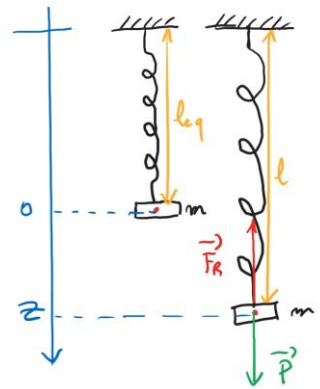
En posant :  $Z = \ell - \ell_{eq} \Rightarrow \ell = Z + \ell_{eq}$ , on obtient :  $m\ddot{z} = m\ddot{Z} = mg - k \times (Z + \ell_{eq} - \ell_0) = -kZ + mg - k \times (\ell_{eq} - \ell_0)$

Or d'après l'étude précédente :  $mg - k \times (\ell_{eq} - \ell_0) = 0$

On en déduit l'équation différentielle :  $m\ddot{Z} = -kZ \Rightarrow \ddot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0$

La solution générale s'écrit :  $Z = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$  avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = (2\pi\sqrt{k}) \times \frac{1}{\sqrt{m}}$

Il suffit alors de mesurer la période d'oscillation  $T_0$  pour plusieurs masses  $m$ , et de tracer  $T_0$  en fonction de  $\frac{1}{\sqrt{m}}$ . Le coefficient directeur de la droite obtenue, égal à  $2\pi\sqrt{k}$ , permet d'obtenir  $k$ .



## Exercice n°3 : Sédimentation d'un globule rouge

1. Référentiel : terrestre supposé galiléen

Système : globule rouge assimilé à une sphère de masse  $m = \frac{4}{3}\mu_0\pi R^3$  assimilé à un point matériel

Forces extérieures s'exerçant sur le globule rouge :

$$\text{Poids : } \vec{P} = m\vec{g} = \frac{4}{3}\mu_0\pi R^3\vec{g}$$

$$\text{Force de frottement : } \vec{f} = -\alpha\vec{v}$$

$$\text{Poussée d'Archimède : } \vec{\Pi}_A = -m_{\text{fluide déplacé}}\vec{g} = -\frac{4}{3}\mu\pi R^3\vec{g}$$

Principe fondamental de la dynamique :  $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi}_A + \vec{f}$

En projection sur l'axe (Oz) descendant :  $\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3\frac{dv_z}{dt} = \frac{4}{3}\mu_0\pi R^3g - \frac{4}{3}\mu\pi R^3g - \alpha v_z \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} + \frac{\alpha}{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}v_z = g\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)$

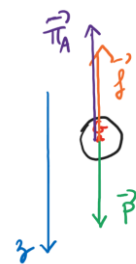
2. La résolution de l'équation différentielle donne :  $v_z = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}{\alpha} \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)$  avec  $\tau = \frac{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}{\alpha}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_z = \frac{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}{\alpha} \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) \Rightarrow v_{lim} = \tau \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)$$

3.  $v_{lim} = \frac{H}{T} \Rightarrow T = \frac{H}{v_{lim}} = \frac{H}{\tau \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)}$

Pour les AN, l'énoncé oublie de dire que  $\alpha = 6\pi\eta R$  donnant  $\tau = \frac{2\mu_0 R^2}{9\eta}$ .

On calcule alors :  $\tau = 0,12 \text{ s}$  et  $T = 1,2 \times 10^5 \text{ s} = 1,4 \text{ jour}$ . Donc  $\tau \ll T$  : le régime permanent est donc bien atteint très rapidement.



**Exercice n°4 : Flottabilité d'un glaçon**

$$14. \vec{\Pi}_A = -m_{\text{eau liquide déplacée}} \vec{g} = -\rho_l V_{\text{glaçon immergé}} \vec{g} = -\rho_l V_i \vec{g}$$

15. Poussée d'Archimède = résultante des forces pressantes exercées par un fluide sur un solide immergé dans ce fluide.

16. La poussée d'Archimède exercée par l'air sur le glaçon est orientée dans le sens de  $\vec{g}$

17. **Référentiel** : Terrestre supposé galiléen

**Système** : glaçon

**Forces extérieures** :

$$\text{Poids} : \vec{P} = m_{\text{totale de glaçon}} \vec{g} = \rho_g V_{\text{total de glaçon}} \vec{g} = \rho_g (V_i + V_e) \vec{g}$$

$$\text{Poussée d'Archimède} : \vec{\Pi}_A = -\rho_l V_i \vec{g}$$

$$\text{A l'équilibre} : \vec{P} + \vec{\Pi}_A = \vec{0} \Rightarrow \rho_g (V_i + V_e) \vec{g} - \rho_l V_i \vec{g} = 0 \Rightarrow \rho_g (V_i + V_e) = \rho_l V_i \Rightarrow V_e = \left( \frac{\rho_l}{\rho_g} - 1 \right) \times V_i$$

$$18. \text{ Avant la fonte du glaçon} : \frac{V_i}{V_{\text{total de glaçon}}} = \frac{V_i}{V_i + V_e} = \frac{\rho_g}{\rho_l} \Rightarrow V_i = V_{\text{occupé par le glaçon dans l'eau (avant fonte)}} = \frac{\rho_g}{\rho_l} \times V_{\text{total de glaçon}}$$

$$\text{Après la fonte du glaçon} : V_{\text{occupé par le glaçon fondu}} = \frac{m_{\text{totale de glaçon}}}{\rho_{\text{eau liquide}}} = \frac{V_{\text{total de glaçon}} \times \rho_g}{\rho_l} = \frac{\rho_g}{\rho_l} \times V_{\text{total de glaçon}}$$

**Bilan** :  $V_{\text{occupé par le glaçon dans l'eau (avant fonte)}} = V_{\text{occupé par le glaçon fondu}}$

Le volume occupé par le glaçon dans l'eau, avant sa fonte, est le même que le volume occupé (dans l'eau) par le glaçon une fois fondu : le niveau de l'eau ne bouge pas.

$$19. \text{ Dans l'eau salée} : V_{\text{occupé par le glaçon dans l'eau (avant fonte)}} = \frac{\rho_g}{\rho_{\text{eau salée}}} \times V_{\text{total de glaçon}}$$

$$V_{\text{occupé par le glaçon fondu}} = \frac{m_{\text{totale de glaçon}}}{\rho_{\text{eau pure}}} = \frac{V_{\text{total de glaçon}} \times \rho_g}{\rho_{\text{eau pure}}} = \frac{\rho_g}{\rho_{\text{eau pure}}} \times V_{\text{total de glaçon}}$$

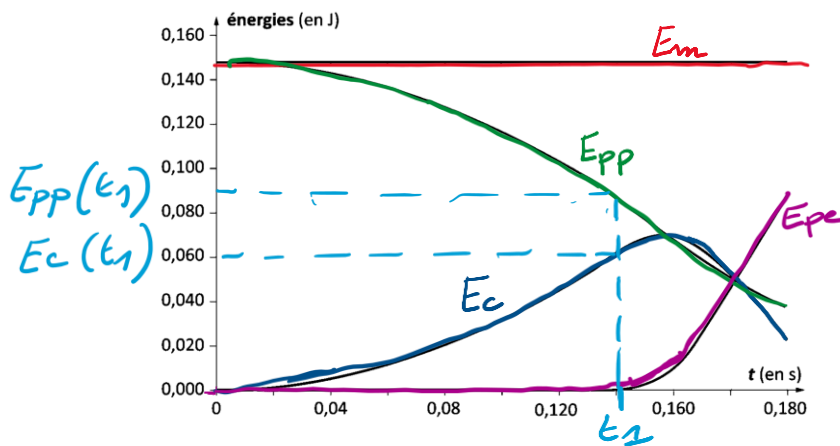
$$\rho_{\text{eau salée}} > \rho_{\text{eau pure}} \Rightarrow V_{\text{occupé par le glaçon fondu}} > V_{\text{occupé par le glaçon dans l'eau (avant fonte)}}$$

Le niveau de liquide monte dans le récipient.

20. La masse volumique de l'eau de mer est proche de celle de l'eau pure (35 g/L de sel donc  $\rho_{\text{mer}} = 1,035 \text{ g/L}$ ), donc la fonte des icebergs ne contribue pas de manière négligeable à l'augmentation du niveau des océans.

**Exercice n°5 : Saut à l'élastique**

1.



$E_c = \frac{1}{2}mv^2$  :  $v \nearrow$ , donc  $E_c \nearrow$ , en début de mouvement puis  $v \searrow$ , donc  $E_c \searrow$ , à partir du rappel de l'élastique

$E_{pp} = mgz$  (axe (Oz) orienté vers le haut) :  $E_{pp} \searrow$  au cours du mouvement

$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$  : existe à partir du moment où l'élastique devient tendu de longueur égal à  $\ell_0$ , puis  $\nearrow$

$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe} = cste$  en absence de frottements (mouvement conservatif :  $\vec{P}$  et  $\vec{F}_R$  sont deux forces conservatives)

2. La chute libre se termine lorsque l'énergie potentielle élastique devient non nulle, donc, par lecture graphique à :  $t_1 = 0,140$  s

Par correspondance graphique, on lit à cette date  $t_1$  :  $E_{pp}(t = t_1) = 0,090$  J. Or  $E_{pp} = mgz \Rightarrow z_1 = \frac{E_{pp}(t=t_1)}{mg} = 0,141$  m

Initialement :  $E_m = E_m(t = 0) = E_{pp}(t = 0) = mgz_0 \Rightarrow z_0 = \frac{E_m}{mg} = 0,235$  m

La hauteur de chute vaut donc :  $h_0 = z_0 - z_1 = 0,094$  m = 9,4 cm

3. Par correspondance graphique, on lit à la date  $t_1$  :  $E_c(t = t_1) = 0,060$  J. Or  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2E_c(t=t_1)}{m}} = 1,26$  m · s<sup>-1</sup>

4.  $W(\vec{F}_R) = -\Delta E_{pe} = -\frac{1}{2}k(\ell_{max} - \ell_0)^2 = -\frac{1}{2}k(z_{max} - z_1)^2$

**Référentiel** : terrestre supposé galiléen

**Système** : solide de masse  $m$  assimilé à un point matériel

**Forces extérieures** :  $\vec{P}$ ,  $\vec{F}_R$

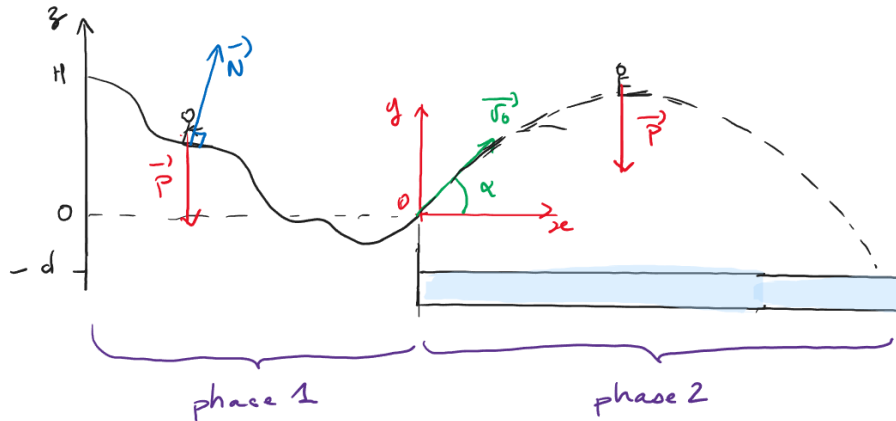
**TEC** :  $\Delta E_c = \sum_i W(\vec{F}_i) = W(\vec{F}_R) + W(\vec{P})$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}k(z_{max} - z_1)^2 + mg \times (z_1 - z_{max}) = -\frac{1}{2}kh_1^2 - mgh_1 \quad \text{avec } h_1 = z_{max} - z_1$$

$$\text{Or } v_{max} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}kh_1^2 - mgh_1 \Rightarrow \frac{1}{2}kh_1^2 + mgh_1 - \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$$

$$h_1 = \frac{-mg + \sqrt{(mg)^2 + 4 \times \frac{1}{2}k \times \frac{1}{2}m}}{k}$$

5.  $H = z_1 + h_1$ . Il manque la valeur de  $k$  pour donner une AN.

**Exercice 6 : Etude du mouvement d'un enfant sur un toboggan**

**Référentiel :** terrestre supposé galiléen

**Système :** enfant assimilé à un point matériel de masse  $m$

**Phase 1 : Glissement sur le toboggan : recherche de la vitesse  $v_0$  de sortie du toboggan**

**Hypothèses :** forces de frottement solide et fluide (avec l'air) négligées : obtiendra alors la vitesse maximale de sortie

**Forces extérieures :**  $\vec{P}$ ,  $\vec{N}$

$$\text{TEM : } \Delta E_m = \sum_i W(\vec{F}_{nci})$$

$\vec{P}$  est conservative et  $\vec{N}$  ne travaille pas, le système est donc conservatif :  $\Delta E_m = 0$

$$\Rightarrow E_m(z = H) = E_m(z = 0) \Rightarrow E_c(z = H) + E_{pp}(z = H) = E_c(z = 0) + E_{pp}(z = 0)$$

En considérant que l'enfant s'élance sans vitesse initiale et en prenant un axe (Oz) verticale orienté vers le haut avec origine en bas de toboggan :  $\Rightarrow 0 + mgH = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gH}$

**Phase 2 : Chute libre hors du toboggan : recherche de l'abscisse du point de chute**

**Hypothèses :** forces de frottement fluide (avec l'air) négligées : obtiendra alors l'abscisse maximale du point de chute

**Forces extérieures :**  $\vec{P}$

$$\text{PFD : } m\vec{a} = \vec{P}$$

Repère (O,x,y) avec origine O en sortie de toboggan et axe (Oy) vertical ascendant. L'enfant sort du toboggan avec la vitesse  $v_0$  et un angle  $\alpha$  avec la verticale

La projection du PFD donne : sur l'axe (Oy):  $m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g$  sur l'axe (Ox):  $m\ddot{x} = 0$

ce qui donne par intégration :  $\dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha$   $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$

ce qui donne par nouvelle intégration :  $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t$   $x = v_0 \cos \alpha t$

En considérant le sol à une altitude par rapport à la sortie du toboggan à  $y = -d$ , le temps  $t_{sol}$  d'arrivée est au sol obéit alors à l'équation :  $-d = -\frac{1}{2}gt_{sol}^2 + v_0 \sin \alpha t_{sol} \Rightarrow \frac{1}{2}gt_{sol}^2 - v_0 \sin \alpha t_{sol} - d = 0$

La résolution de l'équation du 2<sup>ne</sup> degré donne :  $t_{sol} = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gd}}{g}$

L'abscisse vaut alors :  $x(t = t_{sol}) = v_0 \cos \alpha t_{sol} = v_0 \cos \alpha \times \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gd}}{g}$  avec  $v_0 = \sqrt{2gH}$

On peut réaliser l'AN avec des valeurs raisonnables :  $H = 10 \text{ m}$ ,  $d = 1,0 \text{ m}$  et  $\alpha = 30^\circ$  par exemple :

$v_0 = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$   $x(t = t_{sol}) = 18,9 \text{ m}$  qui sont des valeurs maximales puisque les frottements (solide et liquide) ont été négligés

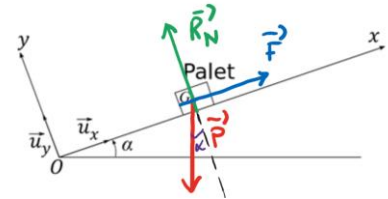
**Exercice 7 : Glissement et frottement sur la glace**

1. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

**Système** : palet assimilé à un point matériel de masse  $m$

**Hypothèses** : forces de frottement solide et fluide (avec l'air) négligées

**Forces extérieures** :  $\vec{P}$ ,  $\vec{R}_N$ ,  $\vec{F}$  durant la phase de propulsion



2. **Principe fondamentale de la dynamique** :  $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}$

En projection sur l'axe (Ox) :  $m\dot{x} = ma = -mgsin\alpha + F \Rightarrow F = ma + mgsin\alpha$

3. Mouvement uniformément accéléré  $\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = cste \Rightarrow v = at \Rightarrow a = \frac{v}{t}$  (vitesse nulle initialement)  
 $\Rightarrow F = m\frac{v}{t} + mgsin\alpha$  AN :  $F = 0,160 \times \frac{50}{0,5} + 0,160 \times 10 \times sin(20) = 16,5 N$

4. Si le palet n'est plus en contact avec la crosse, alors le PFD devient :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$

En projection sur l'axe (Ox) :  $m\dot{x} = ma = -mgsin\alpha \Rightarrow \dot{x} = -gsin\alpha t + v_0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}gsin\alpha t^2 + v_0 t$ , les conditions initiales étant  $\dot{x}(t=0) = v_0$  et  $x(t=0) = 0$

5. Lorsque le palet s'arrête à la date  $t_a$  :  $\dot{x}(t=t_a) = 0 \Rightarrow -gsin\alpha t_a + v_0 = 0 \Rightarrow t_a = \frac{v_0}{gsin\alpha}$

Le palet a parcouru la distance :  $d = x(t=t_a) = -\frac{1}{2}gsin\alpha t_a^2 + v_0 t_a = -\frac{1}{2}gsin\alpha \left(\frac{v_0}{gsin\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{v_0}{gsin\alpha} = \frac{v_0^2}{2gsin\alpha}$

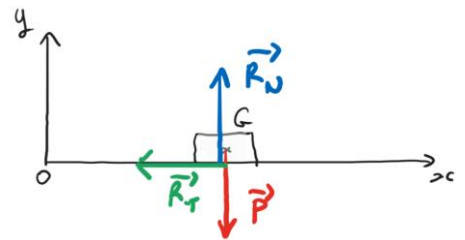
6. **L'énoncé devrait préciser qu'il est attendu l'expression du travail de la composante tangentielle  $\vec{R}_T$  en fonction de  $f$ ,  $m$  et  $g$ .**

En considérant que le palet se déplace sur une distance  $d'$  :

$$W(\vec{R}_T) = \int_0^{d'} \vec{R}_T \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{d'} -R_T dx = -R_T d'$$

Pour cette phase, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$

En projection sur l'axe (Oy) :  $0 = -mg + R_N + 0 \Rightarrow R_N = mg \Rightarrow R_T = f_D R_N = f_D mg$



Donc :  $W(\vec{R}_T) = -f_D mg d'$

7. **TEC** :  $\Delta E_c = \sum_i W(\vec{F}_i) = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) + W(\vec{R}_T) = W(\vec{R}_T)$

car  $\vec{P}$  et  $\vec{R}_N$  ne travaillent pas (droite d'action perpendiculaire au mouvement)

**Remarque** : on pourrait aussi utiliser le TEM

On obtient alors :  $\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -f_D mg d'$  avec  $v' = 0$  (arrêt du palet)

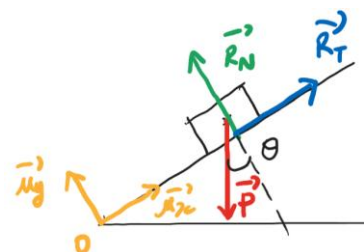
Finalement :  $-\frac{1}{2}mv_0^2 = -f_D mg d' \Rightarrow d' = \frac{v_0^2}{2gf_D}$  AN :  $d' = \frac{50^2}{2 \times 10 \times 0,050} = 2500 m$

8. A l'équilibre :  $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T = \vec{0}$

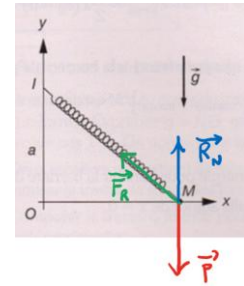
En projection sur l'axe (Ox) :  $-mgsin\theta + R_T = 0$

En projection sur l'axe (Oy) :  $-mgcos\theta + R_N = 0$

Or  $R_T \leq f_S R_N \Rightarrow mgsin\theta \leq f_S mgcos\theta \Rightarrow tan\theta \leq f_S$  : il y a alors glissement dès que  $tan\theta_{lim} = f_S$



9. AN :  $f_S = 0,57$

**Exercice 8 : Etude d'un oscillateur (1)**1. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen**Système** : point matériel M de masse  $m$ **Hypothèses** : forces de frottement solide et fluide (avec l'air) négligées**Forces extérieures** :  $\vec{P}$  : perpendiculaire au mouvement donc ne travaille pas $\vec{F}_R$  : force de rappel élastique = force conservative $\vec{R}_N$  : perpendiculaire au mouvement donc ne travaille pas**TEM** :  $\Delta E_m = \sum_i W(\vec{F}_{nci}) = 0 \Rightarrow$  l'énergie mécanique du point M se conserve2.  $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$  (à une constante près) avec  $\ell = \sqrt{a^2 + x^2}$  (IOM est un triangle rectangle en O)

On en déduit :

$$E_p = \frac{1}{2}k(\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(a^2 + x^2 - 2\ell_0\sqrt{a^2 + x^2} + \ell_0^2) = \frac{1}{2}kx^2 - k\ell_0(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{à une constante près}$$

3. Recherche des **positions d'équilibre** :  $\frac{dE_p}{dx} = 0$ 

$$\Rightarrow kx - \frac{1}{2}k\ell_0 \times 2x \times (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow x - \ell_0 \times x \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 0 \Rightarrow x \left(1 - \ell_0 \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \ell_0 \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 0 \Rightarrow \ell_0 \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \ell_0 \Rightarrow a^2 + x^2 = \ell_0^2 \Rightarrow x^2 = \ell_0^2 - a^2$$

Si  $a < \ell_0$  :  $x = \pm \sqrt{\ell_0^2 - a^2}$       Si  $a > \ell_0$  : il n'y a pas d'autres solutions

**Bilan** :      si  $a < \ell_0$ , il existe trois positions d'équilibre pour  $x = 0$ ,  $x = \sqrt{\ell_0^2 - a^2}$  et  $x = -\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$   
                   si  $a > \ell_0$ , il existe une seule position d'équilibre  $x = 0$

4. Les positions d'équilibre correspondent aux extrema de la courbe donnant l'énergie potentielle. La position d'équilibre est stable si  $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$ , et instable si  $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$ . Une position d'équilibre stable correspond donc à un minimum (local) d'énergie potentielle et une position d'équilibre instable à un maximum (local) d'énergie potentielle.**Courbe 1** : 1 position d'équilibre (pour  $x = 0$ )

**Courbe 2** : 3 positions d'équilibre, 1 instable (pour  $x = 0$ ), et deux stables (d'après la question précédente pour  $x = \sqrt{\ell_0^2 - a^2}$  et  $x = -\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ )

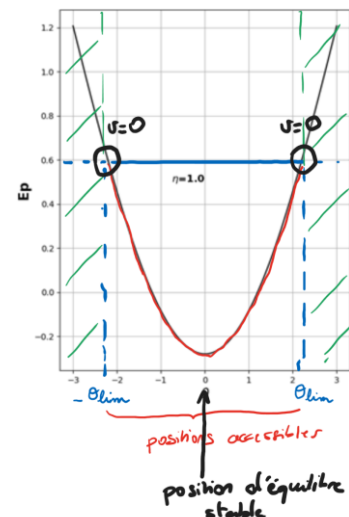
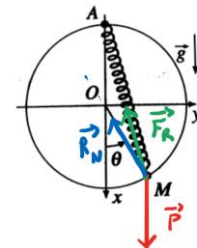
**Exercice 9 : Etude d'un oscillateur (2)**

1. En absence de forces de frottement (hypothèse) :

Poids  $\vec{P}$  : conservative, travailleForce de rappel du ressort  $\vec{F}_R$  : conservative, travailleRéaction du support  $\vec{R}_N$  : ne travaille pas (perpendiculaire au déplacement)2. a.  $E_{pp} = -mgx = -mgacos(\theta)$  (l'axe (Ox) étant descendant)

b.  $E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(AM - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \ell_0\right)^2$

$$\text{c. } E_p = E_{pp} + E_{pe} = -mgacos(\theta) + \frac{1}{2}k\left(2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \ell_0\right)^2 = -mgacos(\theta) + \frac{1}{2}k\left(4a^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4a\ell_0\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \ell_0^2\right) = ka^2\left[-\frac{mg}{ka}\cos(\theta) + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{2\ell_0}{ka}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\ell_0^2}{ka^2}\right]$$

3. a.  $\eta = 0,2$  : 3 positions d'équilibres, 1 instable ( $\theta = 0$ ), deux stables ( $\theta = \pm 2 \text{ rad}$ )  
 $\eta = 1,0$  : 1 position d'équilibre stable ( $\theta = 0$ )b. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliqué à la particule de masse  $m$ , le théorème de l'énergie mécanique donne :  $\Delta E_m = W(\vec{F}_{nc}) = 0$  si les forces de frottement sont négligées. Par conséquent :  $E_m = \text{cste} = 0,6 \text{ J}$ .Or  $E_m = E_c + E_p$  et  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0 \Rightarrow E_p \leq E_m = 0,6 \text{ J}$  : la trajectoire est ici **bornée**, les **positions accessibles** sont comprises entre  $-\theta_{lim}$  et  $\theta_{lim}$ .Par ailleurs, lorsque  $E_p = E_m = 0,6 \text{ J} \Rightarrow E_c = 0 \Rightarrow v = 0$  : **positions de vitesse nulle**.

**Exercice 10 : Inversion de la molécule d'ammoniac**

$$1. E_p(z) = \beta \left( \frac{z^4}{4} - \frac{a^2 z^2}{2} \right) \Rightarrow F(z) = -\frac{dE_p(z)}{dz} = -\beta(z^3 - a^2 z)$$

2. Positions d'équilibre :

$$\frac{dE_p(z_{eq})}{dz} = 0 \Rightarrow -\beta(z_{eq}^3 - a^2 z_{eq}) = 0 \Rightarrow -\beta z_{eq}(z_{eq}^2 - a^2) = 0$$

Il existe donc trois positions d'équilibre :  $z_{eq1} = 0$        $z_{eq2} = a$        $z_{eq3} = -a$

Stabilité des positions d'équilibre :

$$\frac{d^2 E_p(z)}{dz^2} = \beta(3z^2 - a^2)$$

$$\frac{d^2 E_p(z_{eq1=0})}{dz^2} = -\beta a^2 < 0 : \text{position d'équilibre instable} \quad \text{maximum local d'énergie potentielle}$$

$$\frac{d^2 E_p(z_{eq2=a})}{dz^2} = \frac{d^2 E_p(z_{eq3=-a})}{dz^2} = 2\beta a^2 > 0 : \text{position d'équilibre stable} \quad \text{minimum local d'énergie potentielle}$$

3. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliqué à l'atome d'azote, le théorème de l'énergie mécanique donne :  $\Delta E_m = 0$  la seule force extérieure à considérer est la force électromagnétique conservative (car elle dérive d'une énergie potentielle). Par conséquent :  $E_m = cste$ . Or  $E_m = E_c + E_p$  et  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0 \Rightarrow E_p \leq E_m = cste$ .  
Donc si  $E_m = cste \in ]-E_0; 0[$ , la trajectoire est alors **bornée**, les **positions accessibles** sont comprises entre  $z_1$  et  $z_2$  ( $z$  étant initialement positif) :

