Chapitre 6 : Oscillateurs mécaniques

Cadre d'étude : cas d'un système modélisé par un point matériel

I. Modèle de l'oscillateur harmonique libre

1. Description du système d'étude

- **Schéma :**

- **Référentiel :**

- **Système :**

- **Forces :**

2. Aspects énergétiques

- **Rappel :** $dE_m = \delta W_{nc}$
- **Quelles sont les forces qui ne travaillent pas ?**
- **Quelles sont les forces conservatives ?**
- **Bilan :** $dE_m =$ **Le système est :**
- **L'énergie mécanique est alors l'intégrale première du mouvement**

  → en la dérivant par rapport au temps, on va obtenir l'équation différentielle du mouvement

3. Equation du mouvement

- **Etablissement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique :**

- **Etablissement à l'aide du principe fondamental de la dynamique :**

- **Résolution**

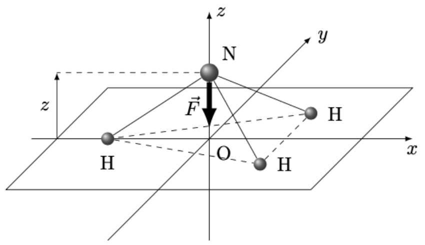
- **Représentation graphique**

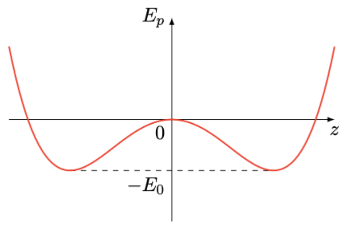
Généralisation : L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique s'écrit :

II. Approximation harmonique

1. Position du problème

Etude des mouvements de faible amplitude au voisinage d'une position d'équilibre stable





$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}} =$ **et** $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}$

2. Approximation locale par un puits de potentiel harmonique

En effectuant un développement limité de la fonction E_p au voisinage de la position d'équilibre et en se limitant au terme du second d'ordre :

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + (x - x_{eq})\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}} + \frac{(x - x_{eq})^2}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}$$

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + \frac{(x-x_{eq})^2}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} = E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$$

En posant $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} = k > 0$ et $X = (x - x_{eq})$ est l'élongation de l'oscillateur par rapport à sa position d'équilibre :

$$\boldsymbol{E_p(x) = E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}kX^2}$$

→ l'oscillateur se comporte comme un oscillateur harmonique en se limitant aux petits mouvements au voisinage d'un équilibre stable

Remarque :
La force dérivant de cette énergie potentielle s'écrit : $\vec{f} = f(x)\overrightarrow{u_x}$ avec $f(x) = -\frac{dE_p}{dx} = -k(x - x_{eq}) = -kX$

3. Equation différentielle linéarisé du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

III. De l'oscillateur harmonique à l'oscillateur anharmonique : l'exemple du pendule pesant

1. Description du système d'étude

- **Schéma :**

- **Référentiel :**

- **Système :**

- **Forces :**

2. Aspects énergétiques

- **Rappel :** $dE_m = \delta W_{nc}$
- **Quelles sont les forces qui ne travaillent pas ?**

- **Quelles sont les forces conservatives ?**

- **Bilan :** $dE_m =$

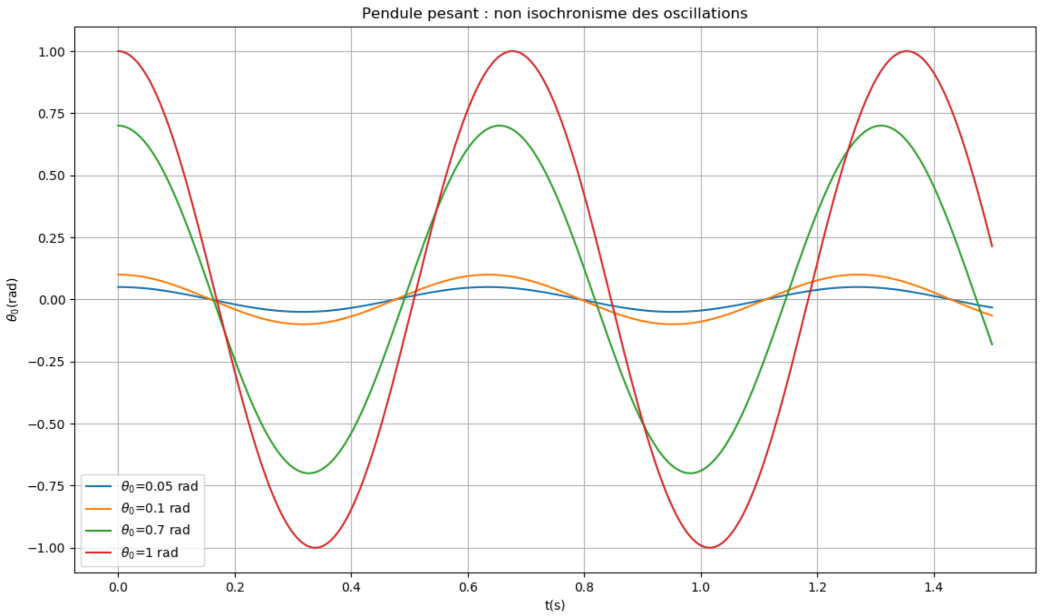
Le système est :

3. Equation du mouvement

4. Approximation harmonique aux petites oscillations du point M au voisinage de sa position d'équilibre

$sin\theta \approx \theta \Rightarrow$

5. Oscillateur anharmonique : non-isochronisme des oscillations

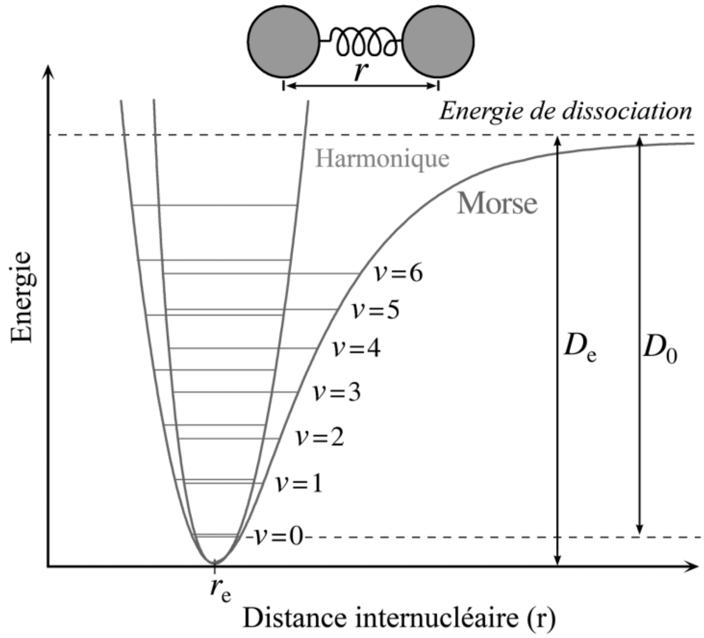


$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$
$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} sin(\theta)$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

t0,tmax=0,1.5#s
N=1000
t=np.linspace(t0,tmax,N)

g=9.8 #m/s^2
l=0.10 #m
theta0=[0.05,0.1,0.7,1]

def derive(F,t):
    theta=F[0]
    thetaprim=F[1]
    return np.array([thetaprim,-g/l*np.sin(theta)])

for i in range(len(theta0)):
    F0=[theta0[i],0]
    F=odeint(derive,F0,t)
    theta=F[:,0]
    plt.plot(t,theta,label=r"$\theta_0$"+f"={theta0[i]} rad")

plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel(r"$\theta_0$(rad)")
plt.title("Pendule pesant : non isochronisme des oscillations")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

IV. Oscillateur harmonique quantique unidimensionnel : niveaux vibrationnels d'une molécule

<u>Classsique</u> : spectre énergétique <u>continu</u> ⇒ <u>Quantique</u> : spectre énergétique <u>discret</u>



La mécanique quantique montre que les seules énergies accessibles par l'oscillateur moléculaire sont :

$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu$avec n entier positif ou nul

V. Oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux

1. Description du système d'étude

Schéma :

- **Référentiel :**

- **Système :**

- **Forces :**

2. Aspects énergétiques : prévision qualitative

- **Rappel :** $dE_m = \delta W_{nc}$
- **Quelles sont les forces qui ne travaillent pas ?**

- **Quelles sont les forces conservatives ?**

- **Bilan :** $dE_m =$ **Le système est :**

3. Equation différentielle du mouvement

L'équation différentielle peut être écrite sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Avec : $\boldsymbol{\omega_0}$ =…………: ……………………………

$\boldsymbol{Q}$ =□…………: ……………………………□

4. Solutions de l'équation différentielle

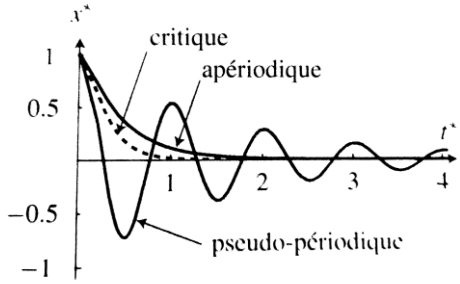
$\boldsymbol{Q}$			
Régime			
$\boldsymbol{x(t)} =$	$\boldsymbol{Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$ avec: $r_i = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ $\Delta = (2\omega_0)^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$	$\boldsymbol{e^{-\omega_0 t}(A + Bt)}$	$\boldsymbol{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))}$ <u>ou</u> $\boldsymbol{Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\Omega t + \varphi)}$ avec: $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
Graphique			

5. Ordre de grandeur de la durée du régime transitoire

Régime critique $Q = \frac{1}{2}$: $\tau_{critique}$: quelques $\frac{1}{\omega_0}$

Régime apériodique $Q < \frac{1}{2}$: $\tau_{apériodique}$: quelques $\frac{1}{\omega_0 Q} > \tau_{critique}$

Régime pseudopériodique $Q > \frac{1}{2}$: $\tau_{pseudopériodique}$: quelques $\frac{2Q}{\omega_0} > \tau_{critique}$



Le régime critique est le plus court de tous les régimes : il correspond au retour le plus rapide à l'équilibre

VI. Oscillateur mécanique forcé

1. L'oscillateur harmonique soumis à une excitation sinusoïdale

- **Description du modèle**

  L'extrémité du ressort est soumise, en plus des autres forces, à une force $\vec{F} = F\overrightarrow{u_z} = F_m\, cos(\omega t)\, \overrightarrow{u_z}$.

  - Schéma :

  - Référentiel :

  - Système :

  - Forces :

- **Equation différentielle du mouvement et résolution**

- Application du principe fondamental de la dynamique :

- En projetant sur l'axe (Oz) :

- En posant : $z(t) = Z_m\, cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{z} = Z_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ et $F = F_m\, cos\, \omega\, t \Rightarrow \underline{F} = F_m e^{j\omega t}$, l'équation devient :

$\underline{z} =$

Et donc : $Z_m =$

$\varphi =$

- Tracé de Z_m et φ en fonction de ω :

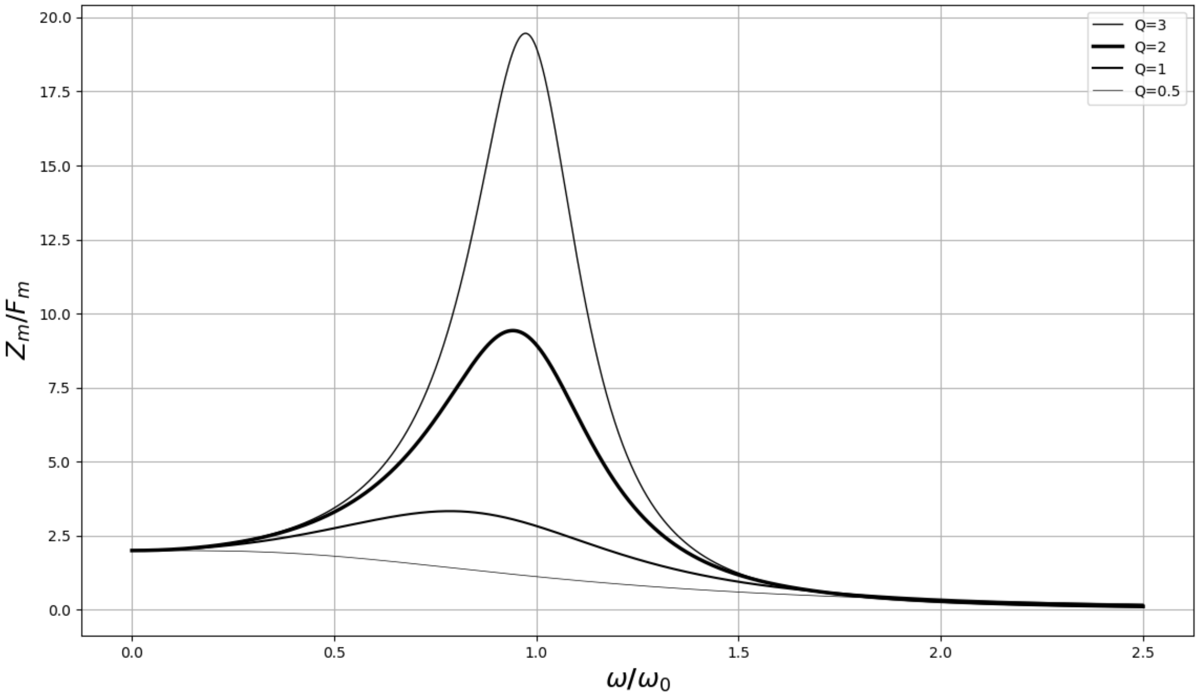
Conclusion : insuffisance du modèle

3. Effet de l'amortissement

Force de frottement : $\overrightarrow{f_{frott}} = -\alpha\vec{v}$ (où α est une constante positive)

Facteur de qualité : $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ plus Q est élevé et ………… l'intensité des forces de frottement est grande

Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

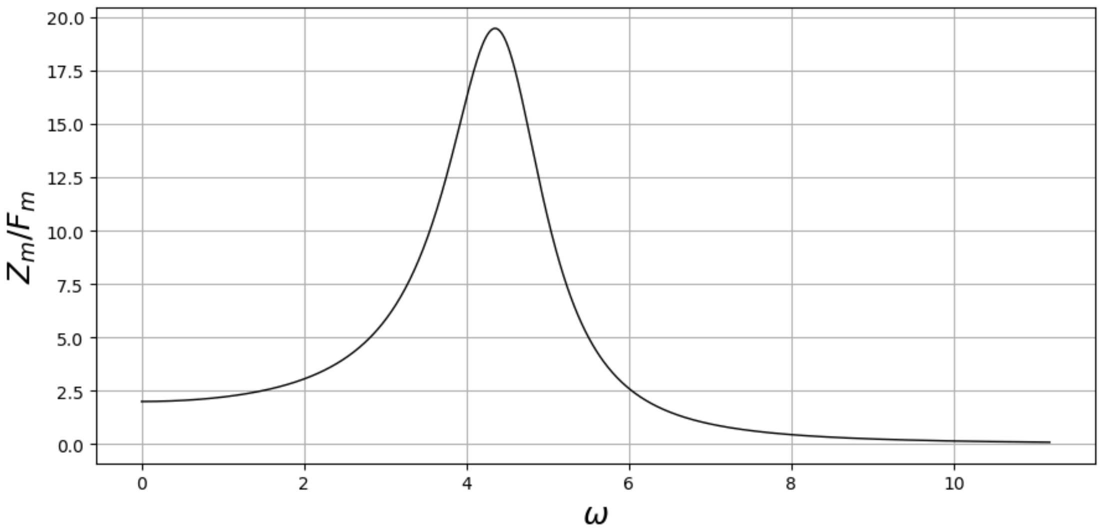


Conclusion :

- Le calcul montre qu'une **résonance** est observée si le facteur de qualité $\boldsymbol{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$
- **Plus le facteur de qualité $\boldsymbol{Q}$ est grand, plus l'acuité de la résonance est forte** (on parle de résonance aigüe)

4. Pulsation de résonance et bande-passante

Cas où $k = 80\ N.m^{-1}$ et $m = 4{,}0\ kg \Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4{,}47\ rad.s^{-1}$



On montre que : $\boldsymbol{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$ donc plus le facteur de qualité est grand et plus la bande passante est étroite.

Les questions à se poser à l'issue de ce chapitre

- Est-ce que je sais définir / distinguer : oscillations libres, oscillations forcées, oscillations harmoniques, oscillations amorties

Cours 1ère année

- Est-ce que je sais déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un système masse – ressort en utilisant la deuxième loi de Newton ? De cette équation, est-ce que je sais déduire les expressions de la pulsation et de la période propres du mouvement ?

Oscillateurs libres

Oscillateur harmonique

- Est-ce que je sais procéder à un bilan énergétique pour déterminer l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un système masse – ressort en utilisant ?
- Est-ce que je sais dans quel cas un oscillateur quelconque peut être approximer par un oscillateur harmonique ?

Oscillateur anharmonique

- Est-ce que je sais à quoi correspond le non-isochronisme des oscillations d'un oscillateur anharmonique ?

Oscillateur amorti par frottement visqueux

- Est-ce que je sais établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un oscillateur amorti par frottement visqueux ?
- Est-ce que, de l'équation différentielle, je peux déduire la pulsation propre et le facteur de qualité ?
- Est-ce que je peux identifier les différents types de régimes selon la valeur du facteur de qualité ? Résoudre l'équation différentielle du mouvement dans les différents cas ?

Oscillateurs forcés

- Est-ce que je connais la méthode pour résoudre un problème d'oscillateur en régime sinusoïdal forcé ?
- Est-ce que je sais à quoi correspond le phénomène de résonance ? Comment celui-ci dépend du facteur de qualité ?
- Sur une courbe donnée, est-ce que je sais déterminer la valeur de la pulsation de résonance et l'intervalle de pulsations ou de fréquences correspondant à la bande passante.