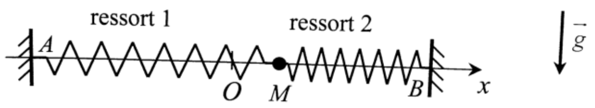
TD Physique n°6 : Oscillateurs mécaniques

Exercice n°1 : Oscillateur à deux ressorts

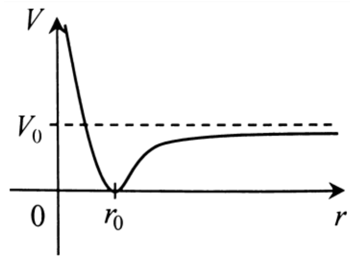


Un petit anneau assimilé à un point matériel M de masse m est astreint à glisser sans frottement le long d'une tige horizontale de direction *(Ox)*. Cet anneau est relié par deux ressorts linéaires à deux points fixes A et B distants de D.
Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur à vide ℓ_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent ℓ_{eq}, et l'anneau se trouve à l'origine O de l'axe. On se place dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen. A $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position $x_0 \neq 0$.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$ de l'anneau M.
2. Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 en fonction de k et m.
3. Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
4. Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p, de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie mécanique E_m de l'anneau en fonction de tout ou partie des grandeurs k, x_0, ω_0 et t. Par convention, $E_p = 0$ pour $x = 0$. Représenter l'allure de ces énergies en fonction du temps sur un même graphe.

Exercice n°2 : Molécule diatomique

Une molécule de monoxyde de carbone (CO) est modélisée par deux masses ponctuelles, m_C pour l'atome de carbone et m_O pour l'atome d'oxygène. On néglige la gravitation.



1. L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique de Morse : $V(r) = V_0\left[1 - e^{-\beta(r-r_0)}\right]^2$ où r est la distance entre les noyaux des deux atomes et où V_0, β et r_0 sont des constantes positives avec $\beta r_0 \gg 1$. Que représentent physiquement les grandeurs V_0 et r_0 ? Quelle est la dimension de β ?

2. Montrer que proche de r_0, l'énergie potentielle d'interaction peut être modélisée par celle d'un ressort de constante de raideur k que l'on calculera. On précise que $e^x \approx 1 + x$ si x est proche de 0.

3. Dans le cadre de cette approximation, on souhaite établir l'équation différentielle décrivant la vibration de la molécule. C'est un système à deux points mais on peut considérer que son énergie mécanique est celle d'une particule fictive de masse $m = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O}$, d'abscisse r sur un axe fixe, soumise à $V(r)$. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$, et en déduire la fréquence f_0 des petites oscillations.

4. A l'échelle atomique, on doit utiliser la mécanique quantique pour déterminer les niveaux d'énergie réellement possibles pour la molécule : on obtient $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h f_0$ avec n un entier naturel et h la constante de Planck.
   - **a.** Calculer numériquement l'écart entre deux niveaux d'énergie successifs : $E_{n+1} - E_n$.
   - **b.** En déduire la longueur d'onde λ, puis le nombre d'onde $\sigma = 1/\lambda$ (en cm^{-1}) d'un photon absorbé par la molécule lors d'une transition de E_n à E_{n+1}. Comparer aux valeurs données dans la table de spectroscopie infrarouge pour les liaisons C=O des molécules organiques.

Données : $V_0 = 10{,}77\ eV$; $\beta = 2{,}31.10^{10}\ SI$; $M_C = 12\ g.mol^{-1}$; $M_O = 16\ g.mol^{-1}$; charge élémentaire $e = 1{,}602.10^{-19}\ C$; constante d'Avogadro $N_A = 6{,}02.10^{23} mol^{-1}$; constante de Planck $h = 6{,}63.10^{-34}\ J.s$; célérité de la lumière $c = 3{,}00.10^8 m.s^{-1}$

Exercice n°3 : Etude de la réponse percussionnelle d'un diapason

Ce problème porte sur l'étude d'un oscillateur mécanique faiblement amorti très utilisé en musique : le diapason (**figure 1**).

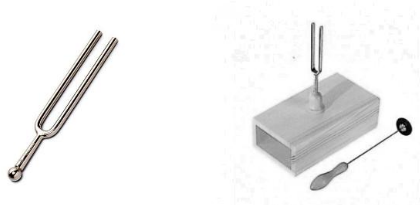


Figure 1 – Gauche : diapason de musicien. Droite : diapason (avec son marteau) muni d'une caisse de résonance pour améliorer l'émission sonore, utilisé dans l'enseignement

Les branches du diapason sont décrites comme un oscillateur masse-ressort oscillant selon un axe horizontal.

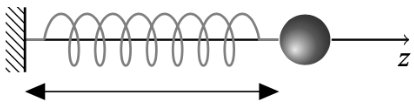


Figure 2 – Modélisation des branches du diapason par un oscillateur masse-ressort horizontal.
La coordonnée z repère la position de la masselotte sur l'horizontale

On note m la masse de la masselotte, k la constante de raideur du ressort linéaire équivalent, ℓ_0 sa longueur à vide et $\ell(t)$ sa longueur à l'instant t (voir **figure 2**). De plus, on suppose que la masselotte est soumise à une force $\vec{F}$ proportionnelle à la vitesse $\vec{v}$: $\vec{F} = -\alpha \cdot \vec{v}$.

1. Quel phénomène physique la force $\vec{F}$ modélise-t-elle ? Justifier par un argument énergétique le signe de la constante α.

À l'instant $t = 0$, on percute l'une des branches du diapason, ce qui provoque la mise en mouvement de chaque branche. On suppose le choc instantané, c'est-à-dire que les branches pseudo-oscillent librement pour $t > 0$. Une note est alors émise.

2. On note $z(t) = \ell(t) - \ell_0$ la position de la masselotte. Établir l'équation différentielle dont $z(t)$ est solution pour $t > 0$.
3. Exprimer la fréquence propre f_0 et le facteur de qualité Q de ce système en fonction de k, m et α.
4. Sachant que l'on obtient des pseudo-oscillations, donner l'expression littérale de $z(t)$ en fonction de k, m et α et de constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.

La commande ODEINT de la bibliothèque SciPy.integrate de Python permet la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre du type :
$\frac{dY}{dt} = f(Y, t)$ avec Y un vecteur qui contient les composantes position $z(t)$ et vitesse $v(t)$.

5. En vue d'une résolution numérique avec ODEINT, transformer l'équation différentielle dont $z(t)$ est solution en un système de deux équations différentielles du premier ordre. Compléter alors le script ci-après (lignes 9, 12,13 et 14) :

```
1 import numpy as np  # Pour avoir les tableaux numpy
2 import matplotlib.pyplot as plt  # Pour les graphiques
3 from scipy.integrate import odeint  # Pour la résolution d'équa. diff.
4
5 omega0 = 10  #pulsation propre en unités arbitaires
6 Q = 5
7 z0 = 5  # position en unités arbitaires
8 v0 = 0  # vitesse en unités arbitaires
9 Y0 = "A COMPLETER"  # conditions initiales
10
11 def f(Y, t):
12     z = "A COMPLETER"
13     v = "A COMPLETER"
14     return "A COMPLETER"
```

La masse de certains diapasons, utilisés par les musiciens, de fréquence propre voisine de 500 Hz vaut 30 g. Pour un diapason sans caisse de résonance, l'émission sonore est détectable à l'oreille pendant environ une trentaine de secondes.

6. Réaliser une estimation de la constante de raideur k du ressort équivalent.

7. La valeur du facteur de qualité d'un oscillateur masse-ressort de travaux pratiques est de l'ordre de 10 alors que celle du diapason est de l'ordre de 10^3. Expliquer pourquoi ces deux ordres de grandeurs sont si différents.

8. Pour un oscillateur masse-ressort de travaux pratiques, dont la période propre vaut $T_0 = 1\ s$, expliquer pourquoi il n'est pas correct d'affirmer que la durée entre deux maxima successifs de la position de la masselotte vaut aussi $1\ s$.

9. Justifier qu'il soit possible néanmoins d'affirmer que les branches d'un diapason de fréquence propre f_0 oscillent, après percussion, à une pseudo-fréquence égale elle aussi à f_0.

10. A l'aide de documents présentés **figure 3**, estimer la fréquence propre f_0 puis le facteur de qualité Q du diapason.

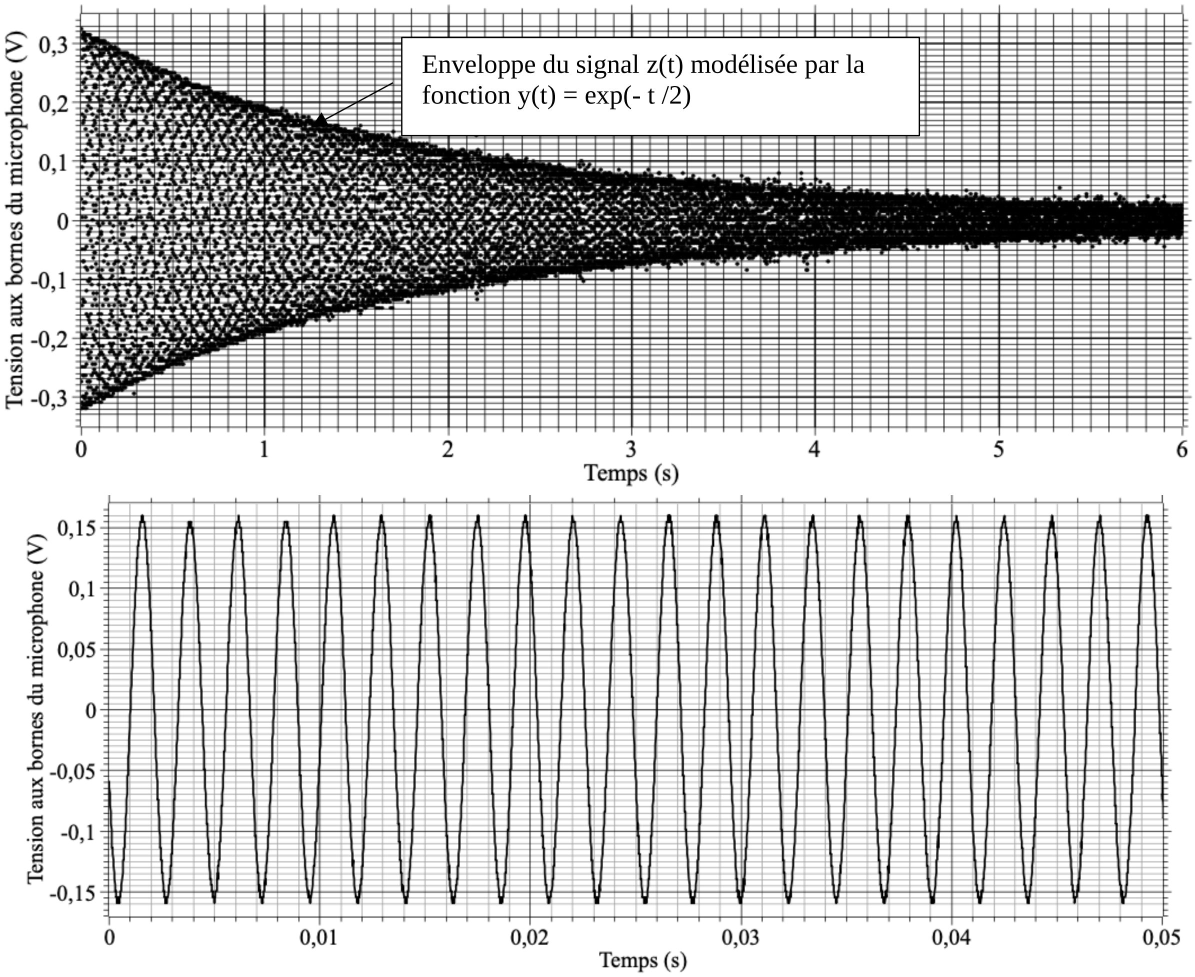
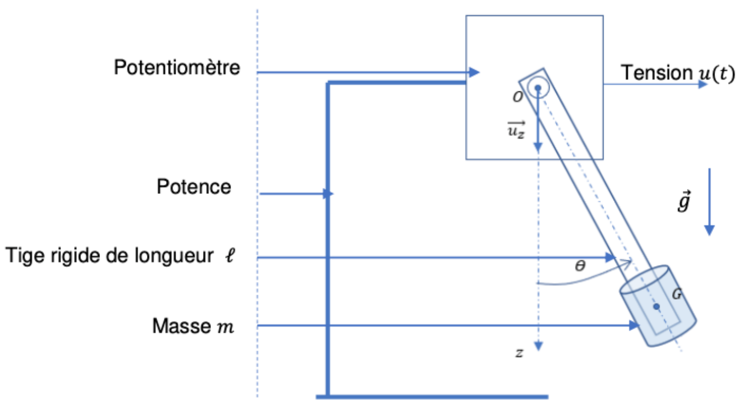


Figure 3 – Réponse percussionnelle du diapason pour deux échelles de temps

Exercice n°4 : Etude d'un pendule pesant

On considère le dispositif dessiné ci-dessous (**figure ci-contre**) permettant d'observer le mouvement d'un pendule pesant constitué d'une tige rigide de longueur ℓ et d'une masse m fixée à son extrémité. A l'image du balancier d'une horloge ou d'une balançoire, la masse m va osciller autour du point O. La position angulaire $\theta(t)$ de la tige est repérée par rapport à l'axe vertical descendant (Oz). Un potentiomètre alimenté, fixé sur une potence et solidaire de la tige en rotation, permet d'apprécier la position angulaire $\theta(t)$ de la tige en délivrant une tension $u(t) = k\theta(t)$ avec k une constante.



Dans cette partie, nous allons travailler avec les hypothèses suivantes :

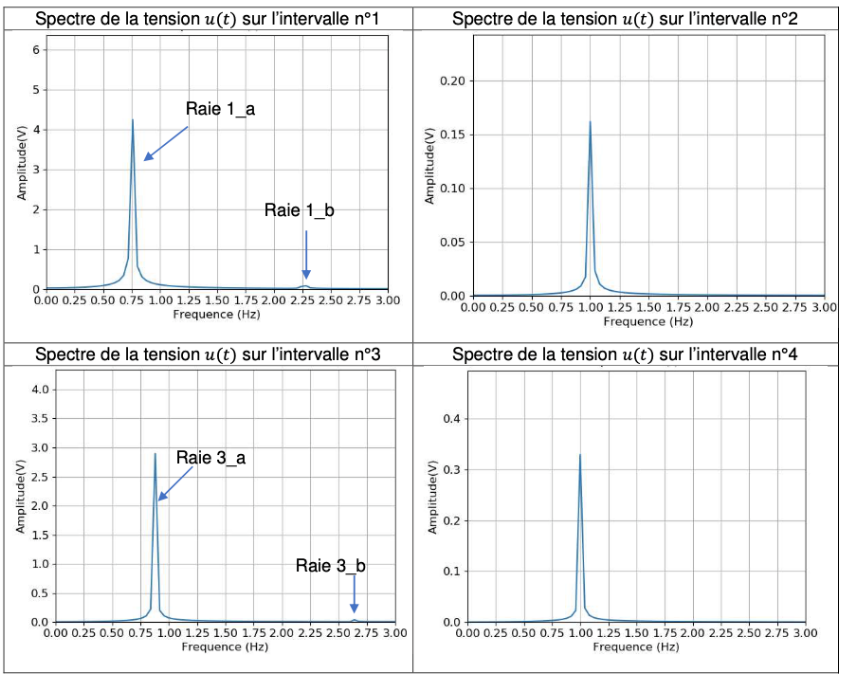
- le mouvement du pendule est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen ;
- les frottements de type fluide seront négligés ;
- on néglige également les effets dissipatifs des actions de contact entre le potentiomètre et la tige ;
- on note $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre et on néglige la poussée d'Archimède de l'air environnant ;
- on néglige la masse de la tige par rapport à la masse m dont le centre de masse $OG \approx \ell$ et on suppose que cette tige exerce sur la masse m une force $\vec{T}$ perpendiculaire à la trajectoire.

Le système oscillant est alors modélisé par un pendule simple dont l'étude se limite à celle de la masse m animée d'une vitesse algébrique v donnée par la relation $v = \ell \frac{d\theta}{dt} = \ell\dot{\theta}$.

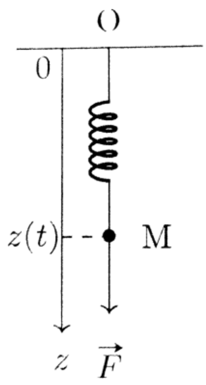
1. Etablir l'expression de l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ associée à ce pendule en fonction de g, m, ℓ et θ . On prendra $E_p(\theta = 0) = 0$.
2. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que l'angle $\theta(t)$ est solution de l'équation différentielle : $\ddot{\theta} + {\omega_0}^2 \sin(\theta) = 0$.
3. Pour cette question, on se place dans l'approximation harmonique qui impose une faible amplitude angulaire des oscillations (amplitude inférieure à 30°). Etablir l'expression de $\theta(t)$ en prenant comme conditions initiales, $\theta(t = 0) = 0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0$. Donner l'expression de la période propre des petites oscillations T_0.

La tension $u(t) = k\theta(t)$ a été mesurée dans 4 conditions initiales durant 25 s, durée suffisamment courte pour négliger les frottements. Pour chaque condition initiale, le signal oscille sur un intervalle de tension appelé intervalle n°1, 2, 3 et 4 (**figure ci-dessous**).

4. Pour quel(s) intervalle(s) l'isochronisme des petites oscillations est-il observé ? En déduire la fréquence propre de l'oscillateur f_0.

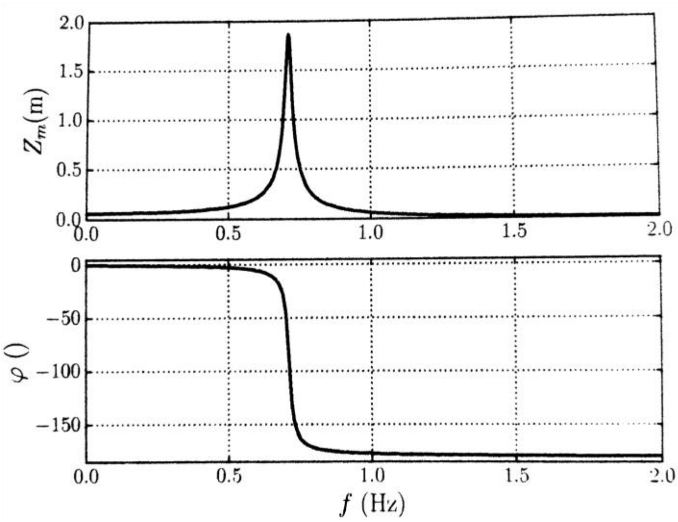


Exercice n°5 : Jeu de singes

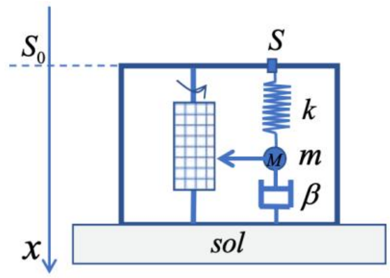


En tirant de façon périodique sur la queue de son ami le gros singe Charlie, mollement suspendu à une liane verticale, Alex le farceur constate que l'amplitude des oscillations de Charlie varie avec la périodicité à laquelle il tire. On modélise la liane par un ressort de raideur $k = 80\ N.m^{-1}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 3{,}0\ m$. Charlie est assimilé à un point matériel M de masse $m = 4{,}0\ kg$. On néglige dans un premier temps tout phénomène dissipatif et on suppose que l'action d'Alex se traduit par l'existence d'une force verticale $\vec{F} = F_m cos(\omega t)$. On donne $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$, accélération de la pesanteur. Charlie est repéré par sa côte z sur un axe vertical descendant.

1. Déterminer la position d'équilibre z_{eq} de M, en l'absence de ce perturbateur d'Alex.
2. On introduit $Z = z - z_{eq}$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par Z lorsque Alex tire sur la queue de Charlie.
3. On étudie la solution en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω et on cherche Z(t) sous la forme $Z(t) = Z_m cos(\omega t + \varphi)$. On introduit les grandeurs complexes $\underline{F}(t) = F_m exp(j\omega t)$ et $\underline{Z}(t) = Z_m exp(j(\omega t + \varphi))$. Déterminer la relation liant $\underline{Z}(t)$ et $\underline{F}(t)$. La mettre sous la forme : $\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{k - m\omega^2}$.
4. Tracer l'évolution de l'amplitude Z_m en fonction la pulsation de l'excitation. Que constate-t-on pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$? Est-ce physiquement acceptable ? Quel élément du modèle faut-il revoir ?
5. On introduit à présent une force de frottement $\overrightarrow{F_f} = -h\vec{v}$ avec $\vec{v}$ la vitesse de Charlie. Trouver la nouvelle relation liant $\underline{Z}(t)$ et $\underline{F}(t)$. La figure ci-contre montre l'évolution de Z_m et de φ avec la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Commenter l'allure de ce graphe et estimer les valeurs du coefficient h et de F_m.



Exercice n°7 : Modélisation d'un sismomètre



On modélise un sismographe par un pendule élastique vertical dont l'extrémité supérieure S est fixée à un boitier solidaire du sol (**figure ci-contre**). A l'instant initial et en l'absence d'activité sismique, l'altitude du point S coïncide avec le point S_0, fixe dans le référentiel terrestre supposée galiléen. Le repère (S_0, x, y, z) est le repère associé à ce référentiel.

L'axe (S_0, x) est orienté vers le bas. On note X la distance SM et g l'intensité de pesanteur. Tant que point S coïncide avec S_0, $X = x$. Le pendule est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 et d'une masse m dont le centre d'inertie sera noté M. La masse est également soumise à une force de frottement fluide de la forme $\vec{f} = -\beta\vec{v} = -\beta\,\dot{X}\,\overrightarrow{u_x}$. Dans cette expression β est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse de la masse dans le référentiel du boitier.

1. Etablir l'expression de X, notée $X_{éq}$, lorsque le sismographe est au repos.

On étudie maintenant la réaction du système au passage d'une onde sismique modélisée par une oscillation sinusoïdale d'amplitude a constante. Le point S ne coïncide plus avec le point S_0. L'abscisse x du point de suspension S dans le référentiel terrestre est variable et a pour expression $S_0S = x_S = a\cos(\omega t)$. Enfin, note $Y = X - X_{éq}$, l'allongement du ressort. Le principe de la dynamique à la masse m dans le référentiel terrestre conduit à l'équation différentielle suivante : $\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + {\omega_0}^2 Y = a\omega^2\cos(\omega t)$. En régime sinusoïdal forcé, la réponse de l'oscillateur forcé est de la forme $Y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ où φ est une constante. On introduit la pulsation réduite $u = {}^{\omega}/_{\omega_0}$ ainsi que le facteur de qualité $Q = {}^{\omega_0}/_{2\lambda}$.

2. En utilisant la notation complexe, montrer que l'amplitude de la réponse A est donnée par la relation : $A = \frac{a}{\sqrt{(\frac{1}{u^2}-1)^2+(\frac{1}{uQ})^2}}$
3. Tracer l'allure de $A = f(u)$ en étudiant les limites et en sachant qu'une légère résonance est observée pour u proche de 1.
4. En déduire quelles ondes sismiques seront fidèlement reproduites par le sismographe.