TD Physique n°6 : Oscillateurs mécaniques - Correction

Exercice n°1 : Oscillateur à deux ressorts

1. Référentiel : terrestre supposé galiléen
   Système : anneau assimilé à point matériel M de masse m
   Forces extérieures : $\vec{P}$, $\overrightarrow{R_N}$, $\overrightarrow{F_{R1}}$, $\overrightarrow{F_{R2}}$
   PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{F_{R1}} + \overrightarrow{F_{R2}}$
   (Ox) : $m\ddot{x} = 0 + 0 - k(\ell_1 - \ell_0) + k(\ell_2 - \ell_0) = -k\left(\frac{D}{2} + x - \ell_0\right) + k\left(\frac{D}{2} - x - \ell_0\right) = -2kx \Longrightarrow \boldsymbol{\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0}$

2. $\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$ est l'équation différentiel d'un oscillateur harmonique de pulsation propre : $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$

3. La solution de l'équation différentielle s'écrit : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$
   Conditions initiales :
   $x(t=0) = x_0 \Longrightarrow A = x_0$
   $\dot{x}(t=0) = 0$ avec $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ $\Longrightarrow B = 0$
   Bilan : $\boldsymbol{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)}$

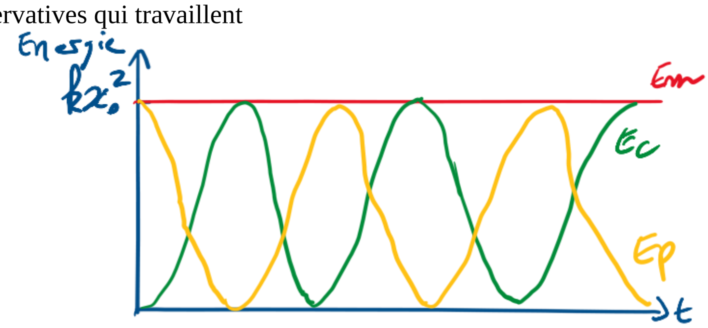
4. **Energie potentielle** :
   $E_p = E_{pp} + E_{pe1} + E_{pe2} + cste = E_{pe1} + E_{pe2} + cste'$ E_{pp}=constante car z =constante
   $\Longrightarrow E_p = \frac{1}{2}k(\ell_1 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(\ell_2 - \ell_0)^2$ à une constante près
   $\Longrightarrow E_p = \frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2} + x - \ell_0\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2} - x - \ell_0\right)^2$

$$\Longrightarrow E_p = \frac{1}{2}k \times \left(2 \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2 \times (\ell_0)^2 + 2 \times x^2 + 2 \times \frac{D}{2} \times x - 2 \times \frac{D}{2} \times \ell_0 - 2 \times \ell_0 \times x - 2 \times \frac{D}{2} \times x - 2 \times \frac{D}{2} \times \ell_0 + 2 \times \ell_0 \times x\right)$$

   $\Longrightarrow E_p = kx^2 \Longrightarrow \boldsymbol{E_p = k{x_0}^2\cos^2(\omega_0 t)}$ $E_p(x=0) = 0$

   Energie cinétique :
   $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m \times \left(-\boldsymbol{x_0\omega_0\sin(\omega_0 t)}\right)^2 = \frac{1}{2}m \times \boldsymbol{{x_0}^2{\omega_0}^2\sin^2(\omega_0 t)} = \frac{1}{2}m \times \boldsymbol{{x_0}^2} \times \boldsymbol{\frac{2k}{m}} \times \boldsymbol{\sin^2(\omega_0 t)}$
   $\Longrightarrow \boldsymbol{E_c = k{x_0}^2\sin^2(\omega_0 t)}$

   $\Longrightarrow \boldsymbol{E_m = E_p + E_c = k{x_0}^2 = constante}$: le système est conservatif (ce que prédit le TEM absence ici de forces non conservatives qui travaillent



Exercice n°2 : Molécule diatomique

1. V_0 : énergie de dissociation de la liaison C-O
   r_0 : distance d'équilibre entre les atomes C et O (valeur donnée dans les tables thermodynamiques)
   $\beta(r - r_0)$ est sans dimension (comme toute grandeur dans une exponentielle) donc β est l'inverse d'une longueur et s'exprime en m^{-1}

2. $r \approx r_0 \Longrightarrow -\beta(r - r_0) \approx 0 \Longrightarrow e^{-\beta(r-r_0)} \approx 1 - \beta(r - r_0) \Longrightarrow V(r) = V_0[\beta(r - r_0)]^2 = \beta^2V_0(r - r_0)^2$
   L'énergie potentielle est sous la forme : $E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$, donc par identification : $\beta^2V_0 = \frac{1}{2}k \Longrightarrow k = 2\beta^2V_0$

3. $E_m = E_c + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \beta^2V_0(r - r_0)^2$
   Le système est conservatif, seule la force associée à $V(r)$ donc conservative étant présente :
   $E_m = cste \Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2}m \times 2 \times \ddot{r} \times \dot{r} + \beta^2V_0 \times 2 \times \dot{r} \times (r - r_0) \Longrightarrow \ddot{r} + \frac{2\beta^2V_0}{m}r = \frac{2\beta^2V_0}{m}r_0$

On reconnaît l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique, la pulsation propre ω_0 étant égale à $\sqrt{\frac{2\beta^2 V_0}{m}} \Longrightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\beta^2 V_0}{m}}$

AN : $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\times(2{,}31.10^{10})^2\times 10{,}77\times 1{,}602.10^{-19}}{\left(\frac{12\times 16}{28}\times 10^{-3}\times\frac{1}{6{,}02.10^{23}}\right)}} = 6{,}4\times 10^{13}\ Hz$ (m en kg pour une molécule, V_0 en J)

4. **a.** $E_{n+1} - E_n = \left(n+1+\frac{1}{2}\right)hf_0 - \left(n+\frac{1}{2}\right)hf_0 = hf_0$ AN : $E_{n+1} - E_n = 1{,}33\times 10^{-21}\ J$

b. $E_{n+1} - E_n = \frac{hc}{\lambda} = hf_0 \Longrightarrow \lambda = \frac{c}{f_0}$ AN : $\lambda = 4{,}69\times 10^{-6}\ m = 4{,}69\times 10^{-4}\ cm$ $\sigma = 1/\lambda = 2132\ cm^{-1}$

Ce qui est correspond à la valeur donnée dans la table de spectroscopie infrarouge pour la vibration de la liaison CO du monoxyde de carbone

Exercice n°3 : Etude de la réponse percussionnelle d'un diapason

1. $\vec{F}$ est une force de **frottements fluides** (ou frottements visqueux)
Puissance de la force $\vec{F}$: $P(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v} = -\alpha\vec{v}\cdot\vec{v} = -\alpha v^2$
Pour que la puissance soit négative (puissance résistante), alors $\boldsymbol{\alpha > 0}$

2. Référentiel : terrestre galiléen
Système : la masselotte assimilée à un point matériel de masse m
Bilan des forces :

- Le poids $\vec{P}$ (perpendiculaire à (Oz))
- La réaction normale du support $\vec{R}$ (perpendiculaire à (Oz))
- La force de rappel du ressort : $\overrightarrow{F_R} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_z = -kz\,\vec{u}_z$
- La force de frottement fluide : $\vec{F} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{z}\,\vec{u}_z$

L'application du PFD donne : $\vec{P} + \overrightarrow{F_R} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$
En projetant sur (Oz) : $-kz - \alpha\dot{z} = m\ddot{z}$
En mettant sous forme canonique, il vient : $\boldsymbol{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0}$

3. On pose ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Longrightarrow$ $\boldsymbol{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$ $\boldsymbol{Q = \frac{\omega_0 m}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{km}}$

4. Régime est pseudo-périodique : $\boldsymbol{z(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}}\times[\boldsymbol{A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)}]$ avec A et B des constantes déterminées par les conditions initiales.

5. $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0$ est équivalent au système :

- $\frac{dz}{dt} = \dot{z} = v$
- $\frac{d\dot{z}}{dt} = \dot{v} = -\frac{\alpha}{m}\dot{z} - \frac{k}{m}z$

Ligne 9 : [z0 ; v0] Ligne 12 : z = Y[0] Ligne 13 : v = Y[1] Ligne 14 : [v ; - $omega/Q * v - omega0 ** 2 * z$]

6. $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ donc $k = 4\pi^2 {f_0}^2 m$

AN : $k = 4\times 3{,}14^2\times 500^2\times 30\times 10^{-3} = 3\times 10^5\ N\cdot m^{-1}$

7. $Q = \frac{1}{\alpha}\sqrt{km}$
Plus les frottements sont grands, moins le facteur de qualité est élevé. En TP, l'oscillateur génère une onde très amortie, ce qui n'est pas le cas du diapason.

8. La pseudo-pulsation Ω n'est pas égale à la pulsation propre de l'oscillateur ω_0 mais ces deux grandeurs sont reliées par la relation :
$\Omega^2 = {\omega_0}^2 - \lambda^2 = {\omega_0}^2 - (\frac{\omega_0}{2Q})^2$
Ainsi, **la pseudo-période T n'est pas égale à la période propre de l'oscillateur $\boldsymbol{T_0}$.**

9. D'après la question précédente, **si le facteur de qualité est très grand, alors $\boldsymbol{\Omega} \approx \boldsymbol{\omega_0}$** et on pourra assimiler la fréquence propre à la pseudo-fréquence de l'oscillateur.

10. Analyse du graphe 2 : $T_0 = 0{,}0022\ s$ (21 périodes en 0,049 s) donc $\boldsymbol{f_0 = 450\ Hz}$
Analyse du graphe 1 : $\lambda = 0{,}5\ s^{-1}$
$\boldsymbol{Q} = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\pi f_0}{\lambda}$ AN : $\boldsymbol{Q} = \frac{3{,}14 \times 450}{0{,}5} = \boldsymbol{2{,}8 \times 10^3}$, on retrouve l'ordre de grandeur de l'énoncé.

Exercice n°4 : Etude d'un pendule pesant

11. $E_p(\theta) = -mgz + cste = -mg\ell cos(\theta) + cste.$
Pour $\theta = 0$, $E_p = 0$ donc $cste = mg\ell$
$\boldsymbol{E_p(\theta) = -mg\ell cos(\theta) + mg\ell = mg\ell\big(1 - cos(\theta)\big)}$

12. Référentiel : terrestre galiléen
Système : la masse assimilée à un point matériel de masse m
Bilan des forces :

- Le poids $\vec{P}$: force conservative
- La tension du fil $\vec{T}$: perpendiculaire à la trajectoire donc ne travaille pas

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell cos(\theta)\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\big(\ell\dot{\theta}\big)^2 - mg\ell cos(\theta)\right) = 0 \Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}sin(\theta) = 0$$

En éliminant la solution $\dot{\theta} = 0$ (pendule à l'équilibre) : $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}sin(\theta) = 0} \Rightarrow {\omega_0}^2 = \frac{g}{\ell}$

13. Méthode 1 : $sin(\theta) \approx \theta$ et $\boldsymbol{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0}$
Méthode 2 : dans l'approximation harmonique :
$$E_p(\theta) = E_p(\theta = 0) + (\theta - 0) \times \left(\frac{dE_p}{d\theta}\right)_{\theta=0} + \frac{1}{2} \times (\theta - 0)^2 \times \left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} \theta^2 = \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$$
TEM : $\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\big(\ell\dot{\theta}\big)^2 + \frac{1}{2}mg\ell\theta^2\right) = 0 \Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\theta = 0$
$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow T_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

14. Il y a isochronisme si la période propre T_0 (ou fréquence propre f_0 de l'oscillateur) ne dépend pas de l'amplitude des oscillations. Ceci semble être le cas pour les conditions 2 et 4 ($f_0 = 1Hz$ pour des amplitudes faibles de 0,17 V et 0,32 V).

Remarque : lorsque les amplitudes sont plus importantes (2,9 V, intervalle 3), la fréquence de l'harmonique fondamentale baisse et il apparaît une autre harmonique, montrant que la solution n'est plus de la forme $\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} sin(\omega_0 t)$.

Exercice n°5 : Jeu de singes

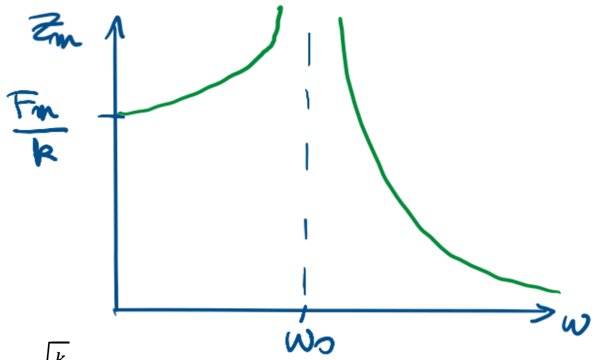
1. Référentiel : terrestre supposé galiléen
Système : Charlie assimilé à point matériel M de masse m
Forces extérieures : $\vec{P}, \overrightarrow{F_R}$
A l'équilibre (principe d'inertie = 1ère loi de Newton) : $\vec{0} = \vec{P} + \overrightarrow{F_R}$
(Oz) : $0 = mg - k(\ell_{eq} - \ell_0)$ avec $\ell_{eq} = z_{eq} \Rightarrow \boldsymbol{z_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$ AN : $\boldsymbol{z_{eq} = 3,49\ m}$

2. PFD (= 2ème loi de Newton) : $m\vec{a} = \vec{P} + \overrightarrow{F_R} + \vec{F}$
(Oz) : $m\ddot{z} = mg - k(z - \ell_0) + F_m cos(\omega t)$
En posant : $Z = z - z_{eq} \Rightarrow z = Z + z_{eq}$, l'équation différentielle devient : $m\ddot{z} = mg - k(Z + z_{eq} - \ell_0) + F_m cos(\omega t)$
$Z = z - z_{eq} \Rightarrow \ddot{Z} = \ddot{z}$ car z_{eq} est constant. D'après la question précédente : $z_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$
L'équation différentielle devient alors : $m\ddot{Z} = mg - k\left(Z + \ell_0 + \frac{mg}{k} - \ell_0\right) + F_m cos(\omega t) = -kZ + F_m cos(\omega t)$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\ddot{Z} + \frac{k}{m} Z = \frac{F_m cos(\omega t)}{m}}$$

3. En notation complexe : $\underline{\ddot{Z}} + \frac{k}{m}\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{m} \Rightarrow -\omega^2 \underline{Z} + \frac{k}{m}\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{m} \Rightarrow \boldsymbol{\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{k - m\omega^2}}$

4. $\boldsymbol{Z_m} = |\underline{Z}| = \frac{|\underline{F}|}{|k - m\omega^2|} = \frac{F_m}{|k - m\omega^2|}$

$\boldsymbol{\omega \to 0 : Z_m \to \frac{F_m}{k}}$ $\boldsymbol{\omega \to +\infty : Z_m \to 0}$ $\boldsymbol{\omega \to \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} : Z_m \to +\infty}$



Pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, l'amplitude Z_m tend vers une valeur infinie, ce qui n'est pas physiquement acceptable. Il faut tenir compte des forces de frottement.

5. On introduit à présent une force de frottement $\overrightarrow{F_f} = -h\vec{v}$ avec $\vec{v}$ la vitesse de Charlie. Trouver la nouvelle relation liant $\underline{Z}(t)$ et $\underline{F}(t)$. La figure ci-contre montre l'évolution de Z_m et de φ avec la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Commenter l'allure de ce graphe et estimer les valeurs du coefficient h et de F_m.
Au bilan des forces précédent, il faut ajouter : $\overrightarrow{F_f} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\overrightarrow{u_z} = -h\dot{Z}\overrightarrow{u_z}$
L'équation différentielle devient : $m\ddot{Z} = -kZ - h\dot{Z} + F_m cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{Z} + \frac{h}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = \frac{F_m cos(\omega t)}{m}$
En notation complexe : $-\omega^2\underline{Z} + j\omega\frac{h}{m}\underline{Z} + \frac{k}{m}\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{m} \Rightarrow \boldsymbol{\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{k - m\omega^2 + j\omega h}}$

$$\Rightarrow Z_m = |\underline{Z}| = \frac{|\underline{F}|}{|k - m\omega^2 + j\omega h|} \Rightarrow \boldsymbol{Z_m = \frac{F_m}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\omega h)^2}}}$$

La courbe $Z_m = f(\omega)$ montre une résonance (aigüe) pour une pulsation proche de la pulsation propre égale à 0,7 Hz environ.

<u>Détermination de F_m :</u>

$$\boldsymbol{Z_m}(\omega = 0) = \boldsymbol{\frac{F_m}{k}} \Rightarrow \boldsymbol{F_m = k \times Z_m}(\omega = 0)$$

Lorsque $\omega = 0$, on estime $\boldsymbol{Z_m}(\omega = 0) = 0{,}05\ m \Longrightarrow AN$: $\boldsymbol{F_m = 4\ N}$

Détermination de h :

En considérant $\omega_{max} = \omega_{résonance} \approx \omega_0$, on obtient : $\boldsymbol{Z_m}(\omega = \omega_{résonance}) = \boldsymbol{Z_{m,max}} = \frac{\boldsymbol{F_m}}{\boldsymbol{\omega_0 h}} = \frac{\boldsymbol{F_m}}{\boldsymbol{h}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{k}}} \Longrightarrow \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{F_m}}{\boldsymbol{Z_{m,max}}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{k}}}$

A la résonance, on estime : $\boldsymbol{Z_m}(\omega = \omega_{résonance}) = \boldsymbol{Z_{m,max} = 1{,}8\ m} \Longrightarrow AN$: $\boldsymbol{h = 0{,}5\ kg \cdot s^{-1}}$

Exercice n°7 : Modélisation d'un sismomètre

1. Référentiel : terrestre galiléen
Système : la masse assimilée à un point matériel de masse m
Bilan des forces au repos :
- Le poids $\vec{P} = +mg\ \vec{u}_x$
- La force de rappel du ressort : $\overrightarrow{F_R} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_x = -k(X - \ell_0)\,\vec{u}_x$

L'application du PFD donne : $\vec{P} + \overrightarrow{F_R} = \vec{0}$
Après projection sur (S_0, x) : $mg - k\left(X_{éq} - \ell_0\right) = 0$
Ainsi : $\boldsymbol{X_{éq} = \frac{mg}{k} + \ell_0}$

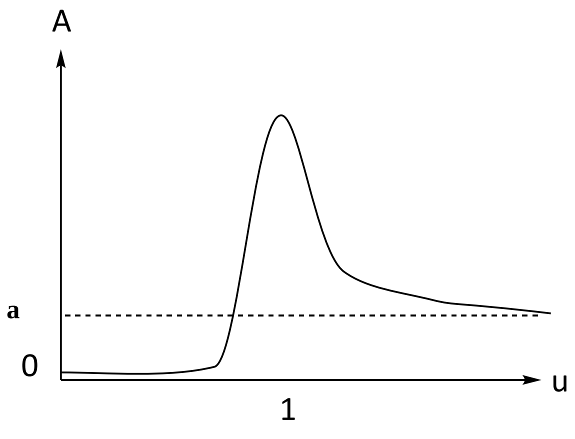
2. On note $\underline{Y} = \underline{A}e^{j\omega t} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}$ solution de l'équation différentielle.
On associe également au second membre $f(t) = \omega^2 a\cos(\omega t)$ la notation complexe $\underline{f} = \omega^2 a\, e^{j\omega t}$.
En injectant dans l'équation différentielle :

$$\left[({\omega_0}^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right]\underline{A}e^{j\omega t} = \omega^2 a\, e^{j\omega t} \Longrightarrow \underline{A} = \frac{a\omega^2}{({\omega_0}^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

En prenant le module : $\boldsymbol{A = \frac{a\omega^2}{\sqrt{\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}}$

En posant la pulsation réduite $u = \omega/\omega_0$: $A = \frac{a}{\sqrt{(\frac{1}{u^2} - 1)^2 + (\frac{1}{uQ})^2}}$

3. Pour $u \to 0$, lim $A = 0$
Pour $u \to \infty$, lim $A = a$
Soit la courbe :



4. $A = a$ si u est très supérieur à 1. Le sismographe retranscrira fidèlement l'amplitude de l'onde sismique pour des **ondes de grandes fréquences**.

Supplément : démonstration de l'équation différentielle donnée

$x_s = S_0 S$
$x_M = S_0 M$
$X = SM = x_M - x_s$
$Y = X - X_{éq}$

Référentiel : terrestre galiléen
Système : la masse assimilée à un point matériel de masse m
Bilan des forces en mouvement :

- Le poids $\vec{P} = +mg\ \vec{u}_x$
- La force de rappel du ressort : $\overrightarrow{F_R} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_x = -k(X - \ell_0)\,\vec{u}_x$
- La force de frottement fluide : $\vec{F} = -\beta\dot{X}\,\vec{u}_x$

L'application du PFD en mouvement et dans le référentiel terrestre donne : $\vec{P} + \overrightarrow{F_R} + \vec{F} = m\vec{a}$

$$mg\,\vec{u}_x - k(X - \ell_0)\,\vec{u}_x - \beta\dot{X}\,\vec{u}_x = m\frac{d^2\overrightarrow{S_0M}}{dt^2}$$

Après projection sur (S_0, x) :

$$mg - k\left(Y + X_{éq} - \ell_0\right) - \beta\dot{X} = m\frac{d^2x_M}{dt^2} = m\frac{d^2X}{dt^2} + m\frac{d^2x_s}{dt^2}$$

Or :

- $X_{éq} - \ell_0 = \frac{mg}{k}$
- $\dot{Y} = \dot{X}$
- $\ddot{Y} = \ddot{X}$
- $\frac{d^2x_s}{dt^2} = -\omega^2 \text{a} \cos(\omega t)$

$$-kY - \beta\dot{Y} = m\frac{d^2Y}{dt^2} - m\,a\,\omega^2\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{k}{m}Y + \frac{\beta}{m}\dot{Y} = a\,\omega^2\cos(\omega t)}$$