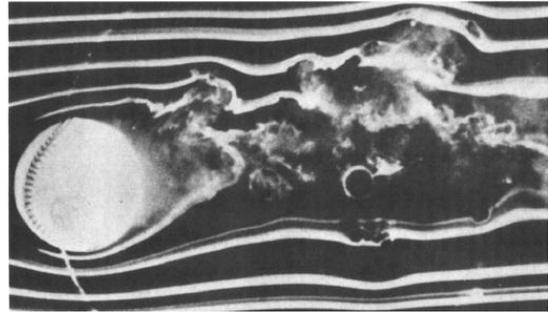


I. Fluide en écoulement

1. Cadre d'étude d'un fluide en écoulement



• **Particule de fluide et grandeurs caractéristiques**

Etat fluide

état liquide (fluide incompressible) ou gazeux (fluide compressible)

Grandeurs intensives caractéristiques :

T, P

masse volumique

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ pour un milieu homogène}$$

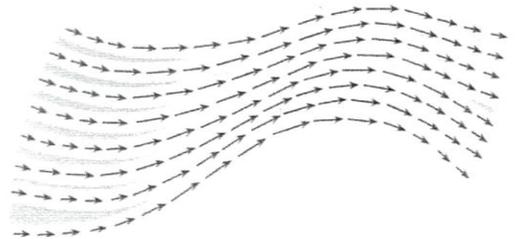
$$\rho = \frac{dm}{dV} \text{ pour un milieu quelconque (définie localement).}$$

$$\rho_{\text{liquide}} \approx 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \gg \rho_{\text{gaz}} \approx 0,5 \text{ kg/m}^3$$

Echelle mésoscopique : A cette échelle, le fluide est « découpé » en **particule de fluide** de masse dm et de volume dV , suffisamment grand (au niveau microscopique) pour contenir un grand nombre de particules ($dV_{\text{gaz}} \approx 1 \text{ mm}^3$, $dV_{\text{liquide}} \approx 1 \mu\text{m}^3$), et suffisamment petit (au niveau macroscopique) pour pouvoir définir localement les grandeurs macroscopiques telles que la masse volumique $\rho(M, t)$, la pression $P(M, t)$, la température $T(M, t)$

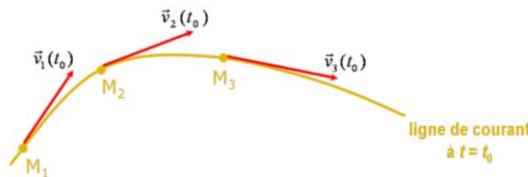
• **Champ eulérien des vitesses**

- Description de l'écoulement du fluide sans faire référence à une particule de fluide particulière et en se plaçant, à chaque instant t , en un point particulier $M(x, y, z)$ de l'écoulement.
- Le mouvement du fluide est alors défini par le champ des vitesses, grandeur locale cours du temps $\vec{v}(M, t)$, qui correspond à la vitesse de la particule de fluide passant en M à l'instant t . L'ensemble des vitesses $\vec{v}(M, t)$ définit le **champ eulérien des vitesses**.



2. Ligne de courant et tube de courant

- **Ligne de courant** = courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse à un instant donné



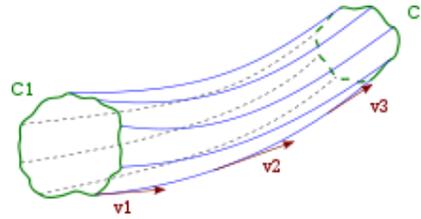
Propriétés :

- 1) deux lignes de courant à un instant donné ne peuvent se croiser
- 2) un resserrement des lignes de courant indique une augmentation de la vitesse des particules de fluide

Notion de point d'arrêt : point de l'écoulement où la vitesse locale des particules du fluide est amenée à nulle

Cas particulier d'un régime stationnaire : les lignes de courant correspondent aux trajectoires des particules de fluide

- **Tube de courant** = ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé



3. Les différents types d'écoulement d'un fluide

- **Écoulement stationnaire :**

Un écoulement est stationnaire si tous les champs eulériens sont indépendants du temps :

$$\rho(M, t) = \rho(M) ; \vec{v}(M, t) = \vec{v}(M) ; P(M, t) = P(M)$$

- **Écoulement unidirectionnel :**

La vitesse de toutes les particules de fluide est parallèle à une direction fixe pour tout instant : les lignes de courant sont alors parallèles entre elles.

Schéma :

- **Écoulement parallèle**

Écoulement unidirectionnel invariant suivant la direction de l'écoulement, donc variant seulement dans le plan transverse à l'écoulement

Schéma :

- **Écoulement incompressible :**

Un écoulement est incompressible si toute particule fluide garde un volume invariable (constant) au cours de son mouvement.

4. Débit de masse et de volume

- **Débit de masse** (ou débit massique)

Masse de fluide en écoulement traversant une section de la conduite par unité de temps

- **Débit de volume** (ou débit volumique)

Volume de fluide en écoulement traversant une section de la conduite par unité de temps

- **Cas particuliers importants**

Écoulement incompressible :

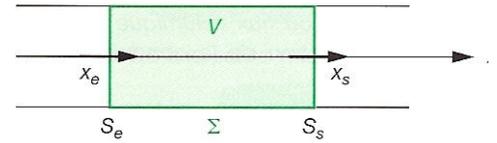
Cas où la vitesse est uniforme sur la surface :

II. Bilan de masse

1. Rappel : description d'un système ouvert

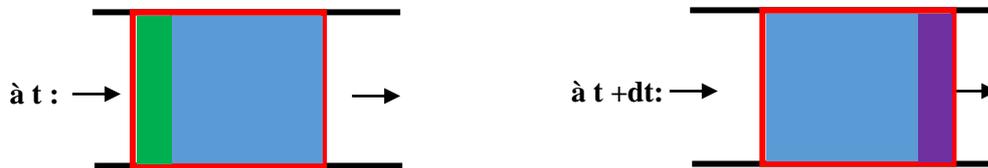
• On considère un fluide (gaz ou liquide) en écoulement dans une conduite de forme quelconque :

- S_e et S_s sections, non rigides, d'entrée et de sortie du système
- Σ :
- V :



• Le système fluide, délimité par la surface de contrôle Σ , est dit **ouvert** car il existe des transferts de matière entre la surface Σ et le milieu fluide extérieur à travers les sections S_e et S_s . Le volume de contrôle ne contient pas les mêmes particules de fluide au cours du temps.

2. Rappel : d'un système ouvert Σ à un système fermé Σ^*



$\Sigma^*(t)$: fluide contenu dans $\Sigma(t)$ + élément de fluide de masse δm_e qui va rentrer dans Σ entre t et $t+dt$.

$\Sigma^*(t+dt)$: fluide contenu dans $\Sigma(t+dt)$ + élément de fluide de masse δm_s qui est sortie de Σ entre t et $t+dt$.

3. Bilan de masse pour un fluide en écoulement

- $m^*(t)$ = masse de fluide contenu dans le système fermé à l'instant t : $m^*(t) = \dots\dots\dots$
- $m^*(t+dt)$ = la masse de fluide contenu dans le système fermé à l'instant $t+dt$: $m^*(t + dt) = \dots\dots\dots$

• Système fermé \Rightarrow

• **Cas d'un écoulement stationnaire :**

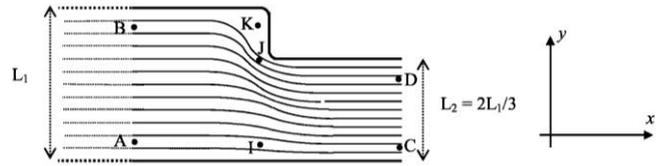
$\frac{dm}{dt} = \dots\dots\dots$

$D_m = \dots\dots\dots$

pour un fluide incompressible ($\rho=cste$), on a aussi : $D_V = \dots\dots\dots$

Application n°1 : Écoulement dans un canal

On considère l'écoulement stationnaire, supposé incompressible, d'eau liquide, dans un canal rectiligne de section rectangulaire. La base de ce canal se situe dans le plan horizontal O_{xy} . Sa hauteur $h = 50\text{cm}$ est constante selon z . Ce canal subit localement un brusque rétrécissement, sa largeur passe de $L_1 = 50\text{cm}$ à $L_2 = 2 L_1 / 3 = 33\text{cm}$. La figure ci-dessus représente les lignes de courant de l'écoulement, de part et d'autre du rétrécissement. Loin du rétrécissement, le champ des vitesses est supposé uniforme sur un plan transverse à l'écoulement.

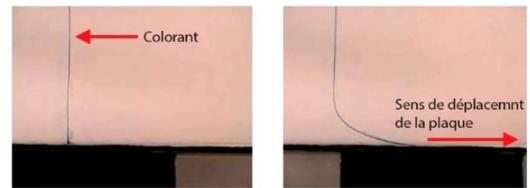
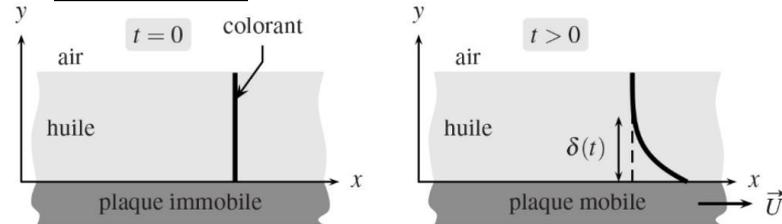


1. Comparer $v(J)$, $v(K)$, $v(A)$ et $v(C)$.
2. La vitesse au point A est de $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Déterminer le débit volumique dans la canalisation. En déduire la vitesse $v(C)$.

III. Actions mécaniques dans un fluide en écoulement

1. Force de viscosité de cisaillement

a. Mise en évidence



b. Force tangentielle de viscosité = force de viscosité de cisaillement

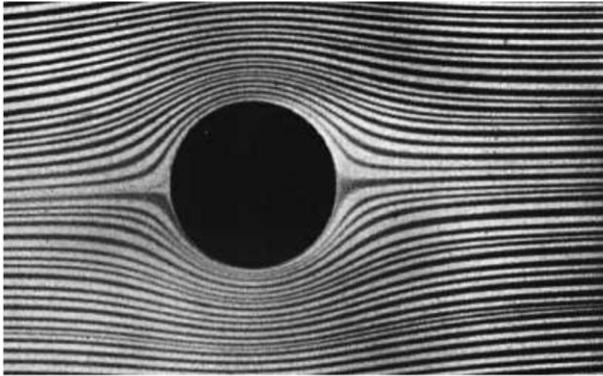
\vec{dF} : force exercée par la couche supérieure sur la couche inférieure

$$\vec{dF} = \vec{dF}_N + \vec{dF}_T$$

avec : \vec{dF}_T : force tangentielle = force de viscosité de cisaillement
 \vec{dF}_N : force normale = force pressante.

c. Écoulement laminaire / turbulent

L'écoulement est dit **laminaire** si les couches glissent les unes sur les autres sans se mélanger. La répartition des vitesses est bien régulière, l'écoulement est « régulier » et « stable ». Sinon il est dit **turbulent** (présence de tourbillons dans l'écoulement) : « fluctuant » et « instable ».



Écoulement laminaire



Écoulement présentant une zone turbulente

d. Fluide visqueux newtonien

- Pour un **écoulement laminaire** plan, pour lequel $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$, le fluide est **newtonien** si la force de viscosité de cisaillement exercée par la couche de fluide supérieure sur une surface dS de la couche inférieure (par rapport à l'axe (Oy)) s'écrit :

$$\vec{dF} = \eta \frac{dv_x(y)}{dy} dS \vec{e}_x \quad \text{où } \eta = \text{viscosité dynamique (en poiseuille } Pl \text{ ou } Pa \cdot s)$$

Analyse dimensionnelle :

Valeurs : $\eta_{air} \approx 10^{-5} Pl$ $\eta_{eau} \approx 10^{-3} Pl = 1 mPl$ $\eta_{glacier} \approx 10^{+11} Pl$

- Remarque** : la force de viscosité de cisaillement exercée par la couche de fluide inférieure sur une surface dS de la couche supérieure (par rapport à l'axe (Oy)) s'écrit : $\vec{dF} = -\eta \frac{dv_x(y)}{dy} dS \vec{e}_x$
- Généralisation** pour un écoulement laminaire cylindrique, pour lequel $\vec{v} = v_x(r)\vec{u}_x$, le fluide est newtonien si la force de viscosité de cisaillement exercée par la couche de fluide supérieure sur la couche inférieure (par rapport à r croissant) s'écrit : $\vec{dF} = \eta \frac{dv_x(r)}{dr} dS \vec{e}_x$

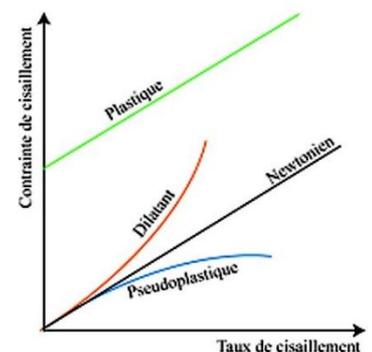
• Cas des fluides non-newtoniens

Contrainte de cisaillement : $\frac{\|\vec{dF}\|}{dS}$ Taux de cisaillement = gradient de vitesse $\left| \frac{dv_x}{dy} \right|$

Fluide newtonien : la viscosité est constante (la contrainte de cisaillement est proportionnelle au taux de cisaillement)

Rhéofluidifiant (pseudo-plastique) : la viscosité diminue lorsque le taux (ou la contrainte) de cisaillement augmente (cas général)

Rhéopaississant : la viscosité augmente lorsque le taux (ou la contrainte) de cisaillement augmente



Application n°2 :

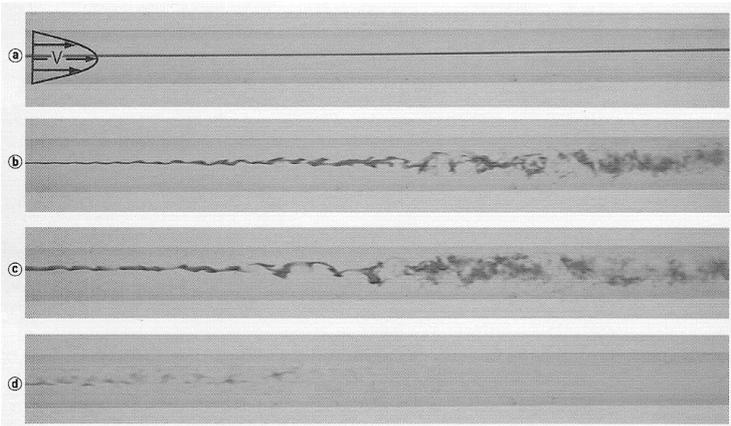
- Un liquide newtonien, de viscosité dynamique η s'écoule entre deux plans infinis parallèles distants de h et orthogonaux à l'axe Oz des coordonnées.
- le plan en $z = 0$ est immobile alors que le plan en $z = h$ est en translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{V} dans la direction Ox de vecteur unitaire \vec{u}_x .
- On suppose que l'écoulement est stationnaire et que le profil des vitesses est linéaire selon Oz . Le champ des vitesses dans le fluide s'écrit donc : $\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$.



- Donner l'expression du champ des vitesses dans le fluide en fonction de V , h et z .
- Établir l'expression de la force de viscosité de cisaillement subie par une section carrée de côté a du plan inférieur.

2. Nombre de Reynolds – Ecoulements laminaires et turbulents

a. Nombre de Reynolds R_e



b. Écoulement laminaire et écoulement turbulent

c. Expression des grandeurs caractéristiques

	Écoulement dans une conduite	Écoulement autour d'un objet sphérique
Vitesse caractéristique U		
Longueur caractéristique L		

Exemples :

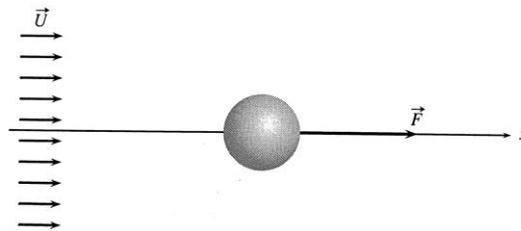
- Ecoulement du miel $\eta_{miel} = 10 \text{ Pl}$; $\rho_{miel} = 1,4 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$:
- Ecoulement de l'eau autour d'une bille en chute dans un verre d'eau $\eta_{eau} = 10^{-3} \text{ Pl}$:

3. Traînée d'une sphère en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide newtonien**a. Force de traînée**• **Définition**

Force de frottement s'opposant au mouvement d'un corps dans un liquide ou un gaz au repos loin de l'objet. Cette force est orientée dans le sens opposé à la vitesse \vec{V} de déplacement de l'objet.

• **Remarque : mesure expérimentale**

Changement de référentiel : objet immobile dans un écoulement dont la vitesse loin de l'objet est : $\vec{U} = -\vec{V}$

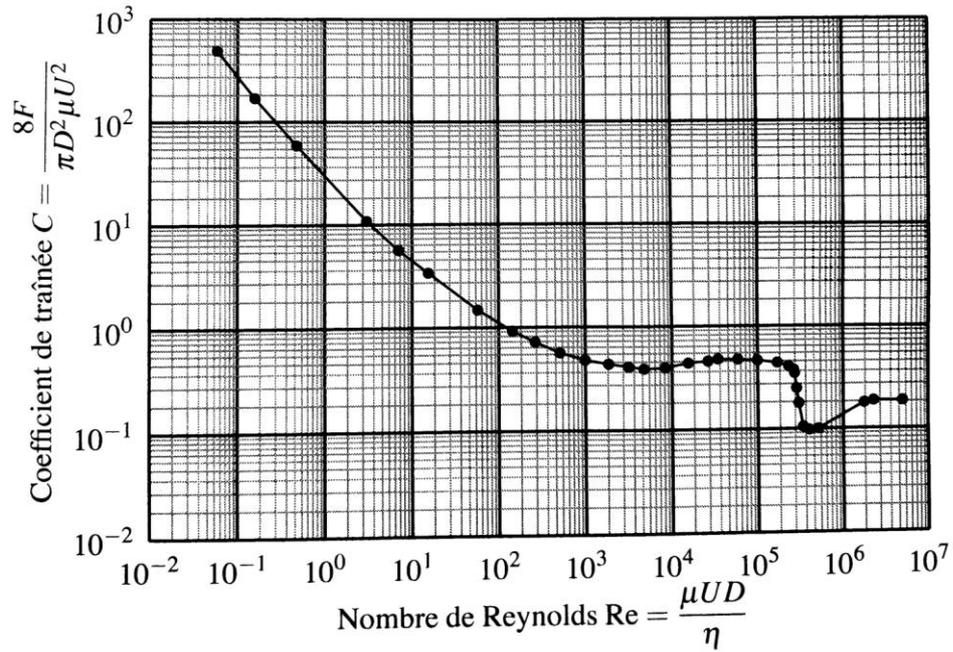
• **Expression dans le cas d'un mouvement de translation uniforme ($\vec{V} = \overrightarrow{cst}$)**

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho C_x S V \vec{V} \quad \text{Cas d'une sphère de diamètre } D=2R : \vec{F} = -\frac{1}{2}\rho C_x \pi R^2 V \vec{V} = -\frac{1}{2}\rho C_x \pi \frac{D^2}{4} V \vec{V}$$

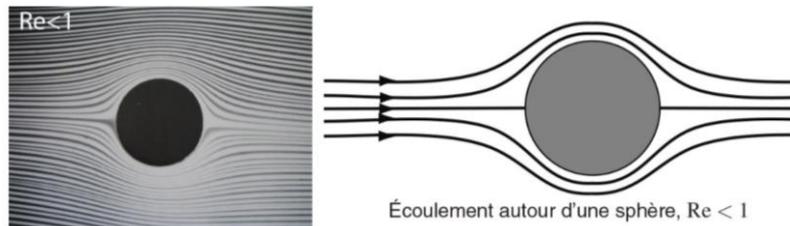
• **C_x : Coefficient de traînée**

Analyse dimensionnelle :

- Coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds



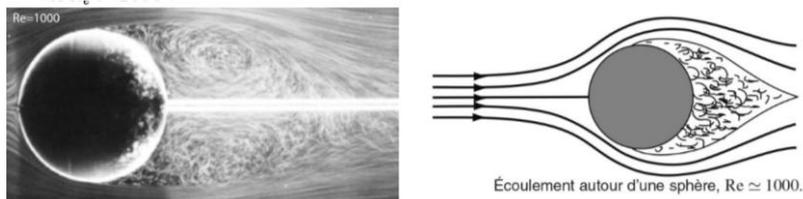
Cas où $Re < 1$:



$$C_x = \frac{24}{Re} \Rightarrow$$

La norme de la force de traînée est proportionnelle à la norme de la vitesse : on parle de **modèle de traînée linéaire** en vitesse

Cas où $10^3 < Re < 10^5$:



$$C_x \approx cst \approx 0,4 \Rightarrow$$

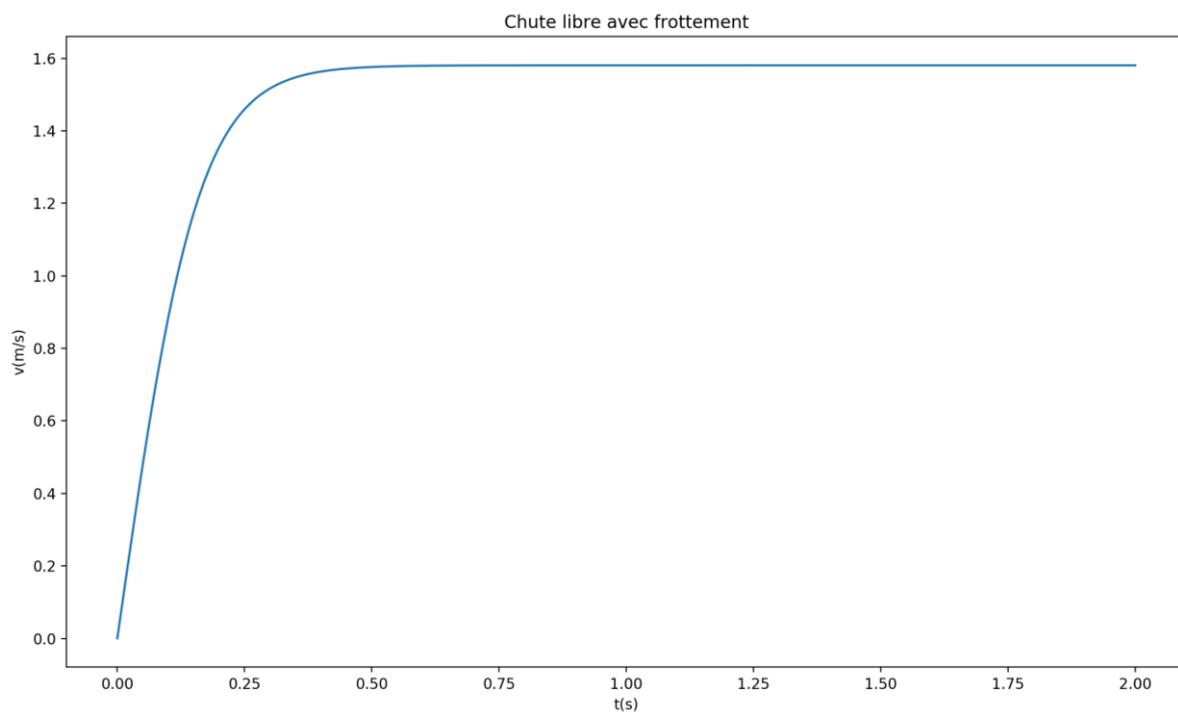
La norme de la force de traînée varie comme le carré de la norme de la vitesse : on parle de **modèle de traînée quadratique** en vitesse

b. Application à l'évolution de la vitesse en fonction du temps dans le cas de la chute d'une bille sphérique

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 #Paramètres
6 g=9.81 #m/s^2
7 m=0.005 #kg
8 R=0.005 #m
9 rho=1000 #kg/m3
10 nu=1E-6 #m2/s^-1
11
12 #Modélisation du coefficient de Trainée
13 def Cx(Re):
14     if Re==0:
15         return 0
16     elif Re<1:
17         return 24/Re           #régime de Stokes Re<=1
18     elif 1<=Re<=1000:
19         return 24/Re*(1+0.15*Re**0.687)
20     elif 1000<=Re<=1E5:
21         return 0.5           #régime de Newton
22     else:
23         return 0.2
24
25 #Evolution de la vitesse de la bille en fonction du temps : méthode d'Euler
26 h=0.01 #pas
27 duree = 2 #s
28 N=duree/h #nombre de points
29
30 V0=0 #m/s   vitesse initiale
31
32 t=[0]      #création d'une liste temps
33 V=[V0]     #création d'une liste vitesse
34 i=1       #incrément itération
35
36 while i<=N :
37     Re=2*R*V[-1]/nu
38     t.append(i*h)
39     V.append(V[-1]+(g-1/2*rho*Cx(Re)*np.pi*R**2*V[-1]**2/m)*h)
40     i=i+1
41
42 plt.plot(t,V)
43 plt.xlabel("t(s)")
44 plt.ylabel("v(m/s)")
45 plt.title("Chute libre avec frottement")
46 plt.show()

```



Les questions à se poser à l'issue de ce chapitre**Vocabulaire**

- Est-ce que je sais définir / illustrer les termes suivants :
 - particule de fluide
 - champ eulérien des vitesses
 - ligne de courant
 - tube de courant
 - écoulement stationnaire
 - écoulement incompressible
 - écoulement unidirectionnel
 - écoulement parallèle
- Est-ce que je sais faire la distinction entre écoulement laminaire et turbulent ?
- Est-ce que je sais à quoi correspond un fluide newtonien ?
- Est-ce que je sais à quoi correspond un débit de masse et de volume ?

Bilan de masse

- Est-ce que je sais passer d'un système ouvert à un système fermé ?
- Est-ce que je sais établir le bilan de masse pour un fluide en écoulement ?

Actions mécaniques dans un fluide en écoulement

- Est-ce que je sais à quoi correspond la force de viscosité de cisaillement ?
- Est-ce que je sais exprimer le nombre de Reynolds ?
- Est-ce que je connais l'expression de la force de trainée dans le cas d'un mouvement de translation uniforme ?
- Est-ce que je sais évaluer un nombre de Reynolds et choisir le modèle de la force de trainée ?
- Est-ce que je sais lire / compléter / exploiter un script python qui permet de résoudre l'équation différentielle vérifiée par la vitesse ?