

TD Physique n°7 : Description d'un fluide en écoulement

Exercice 1 : Ecoulement sur un plan incliné

$$1. \quad \overrightarrow{dF} = \pm \eta \frac{dv(z)}{dz} dS \overrightarrow{e_x} \Rightarrow \frac{dF}{ds} = \pm \eta \frac{dv(z)}{dz} \overrightarrow{e_x} = \pm \eta \times \frac{\rho g \sin \theta}{\eta} (d - z) \overrightarrow{e_x} = \pm \rho g \sin \theta (d - z) \overrightarrow{e_x}$$

Au niveau du **fond du canal** ($z = 0$), la force de viscosité par unité de surface est exercée par la couche de fluide supérieure : $\frac{dF}{ds} = \rho g \sin \theta d \overrightarrow{e_x}$

Au niveau de la **surface du liquide** ($z = d$), la force de viscosité est nulle : $\frac{dF}{ds} = \vec{0}$

$$2. \quad D_v = \int_{(S)} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_{(S)} v dS$$

$$3. \quad D_v = VS = V \times d \times \ell$$

$$4. \quad D_v = \int_{(S)} v dS = \int_0^d \frac{\rho g z \sin \theta}{\eta} \left(d - \frac{z}{2}\right) \ell dz = \frac{\rho g \ell \sin \theta}{\eta} \int_0^d \left(d \times z - \frac{z^2}{2}\right) dz = \frac{\rho g \ell \sin \theta}{\eta} \times \left[\frac{dz^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right]_0^d = \frac{\rho g \ell \sin \theta}{\eta} \times \left(\frac{d^3}{2} - \frac{d^3}{6}\right)$$

$$\Rightarrow D_v = \frac{\rho g \ell \sin \theta}{\eta} \times \frac{d^3}{3}$$

$$5. \quad D_v = \frac{\rho g \ell \sin \theta}{\eta} \times \frac{d^3}{3} = V \times d \times \ell \Rightarrow V = \frac{\rho g \sin \theta}{\eta} \times \frac{d^2}{3}$$

Exercice n°2 : Sédimentation

$$1. \quad \text{Régime de Stokes : } C_x = \frac{24}{Re}$$

$$C_x = \frac{24}{Re} = \frac{24\eta}{V \times D \times \mu} \Rightarrow F = \frac{1}{2} \mu \times \frac{24\eta}{V \times D \times \mu} \times \pi \frac{D^2}{4} V^2 = 3\pi\eta DV \quad \vec{F} = -3\pi\eta D \vec{V}$$

2. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

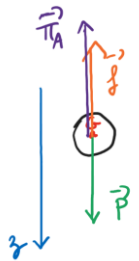
Système : particule sphérique assimilée à une sphère de masse $m = \frac{4}{3} \mu_0 \pi R^3$ assimilée à un point matériel

Forces extérieures s'exerçant sur la particule sphérique :

$$\text{Poids : } \vec{P} = m \vec{g} = \frac{4}{3} \mu_0 \pi R^3 \vec{g} = \frac{1}{6} \mu_0 \pi D^3 \vec{g}$$

$$\text{Force de frottement : } \vec{F} = -3\pi\eta D \vec{v}$$

$$\text{Poussée d'Archimède : } \vec{\Pi}_A = -m_{\text{fluide déplacé}} \vec{g} = -\frac{1}{6} \mu \pi D^3 \vec{g}$$



$$\text{Principe fondamental de la dynamique : } m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi}_A + \vec{F}$$

$$\text{En projection sur l'axe (Oz) descendant : } \frac{1}{6} \mu_0 \pi D^3 \frac{dv}{dt} = \frac{1}{6} \mu_0 \pi D^3 g - \frac{1}{6} \mu \pi D^3 g - 3\pi\eta D v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{3\pi\eta D}{\frac{1}{6} \mu_0 \pi D^3} v = g \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{18\eta}{\mu_0 D^2} v = g \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)$$

$$\text{La solution de l'équation différentielle s'écrit : } v(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{\mu_0 D^2}{18\eta} \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{D^2 g}{18\eta} (\mu_0 - \mu)$$

avec $\tau = \frac{\mu_0 D^2}{18\eta}$

$$\text{CI : } v(t = 0) = 0 \Rightarrow K = -\frac{D^2 g}{18\eta} (\mu_0 - \mu) \Rightarrow v(t) = \frac{D^2 g}{18\eta} (\mu_0 - \mu) \times \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \text{ avec } \tau = \frac{\mu_0 D^2}{18\eta}$$

$$3. \quad U = \lim_{t \rightarrow +\infty} v = \frac{D^2 g}{18\eta} (\mu_0 - \mu) = \frac{D^2 g \Delta \mu}{18\eta}$$

$$4. \quad T_{lim} \approx 5\tau = 5 \times \frac{\mu_0 D^2}{18\eta}$$

$$\text{AN : } T_{lim}(\text{sable fin}) = 4,4 \times 10^{-3} \text{ s} \quad T_{lim}(\text{slit}) = 3,1 \times 10^{-5} \text{ s}$$

$$T_{lim}(\text{argile}) = 4,7 \times 10^{-7} \text{ s}$$

La vitesse limite est atteinte dans un temps très court par rapport au temps pour atteindre la profondeur de 4 km. On peut donc considérer la vitesse de sédimentation constante et égale à cette vitesse limite (mouvement rectiligne et uniforme).

5. $T_{\text{dépôt}} = \frac{h}{U}$ avec $h = 4 \times 10^3 \text{ m}$

AN : $T_{\text{dépôt}}(\text{sable fin}) = 14 \text{ j}$ $T_{\text{dépôt}}(\text{slit}) = 8,5 \times 10^3 \text{ j}$ $T_{\text{dépôt}}(\text{argile}) = 1,2 \times 10^5 \text{ j}$

6. $R_e = \frac{V \times D \times \mu}{\eta} = \frac{U \times D \times \mu}{\eta} = \frac{\frac{D^2 g \Delta \mu}{18 \eta} \times D \times \mu}{\eta} = \frac{g \times D^3 \times \mu \times \Delta \mu}{18 \eta^2}$

AN : $R_e(\text{sable fin}) = 0,33$ $R_e(\text{slit}) = 5,5 \times 10^{-5}$ $R_e(\text{argile}) = 3,8 \times 10^{-7}$

On se trouve bien dans le régime de Stokes ($R_e < 1$).

Exercice 3 : Ecoulement dans un glacier

1. $m_{\text{glace}} = \rho_{\text{glace}} \times \left(\frac{h_{\text{max}} - h_{\text{min}}}{\sin \alpha} \right) \times L \times e$ AN : $m_{\text{glace}} = 9,3 \times 10^8 \text{ t}$

2. $U = \frac{h_{\text{max}} - h_{\text{min}}}{\sin \alpha} \times \frac{1}{\Delta t}$ où $\Delta t = 47 \text{ ans} = 47 \times 365 \times 24 \times 3600 \text{ s}$

AN : $U = 4,7 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 4,7 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

3. $R_e = \frac{U \times L_{\perp}}{\eta} \times \rho$ où $L_{\perp}$ est la longueur caractéristique de l'écoulement, transverse à celui-ci : $L_{\perp} = e$

AN : $R_e = 5,2 \times 10^{-11} < R_{ec} \sim 2000 - 3000$: le régime d'écoulement est donc laminaire.

4. La force de viscosité, dirigée suivant l'axe (Ox), étant compensée par la composante du poids sur l'axe (Ox), on obtient :

$$\tau dS = m_{\text{glace}} g \sin \alpha = \rho_{\text{glace}} dV_{\text{glace}} g \sin \alpha = \rho_{\text{glace}} z dS g \sin \alpha \Rightarrow \tau = \rho_{\text{glace}} z g \sin \alpha$$

5. $\tau_T(z = e) = \rho_{\text{glace}} e g \sin \alpha$ AN : $\tau_T(z = e) = 5,1 \times 10^5 \text{ Pa} \sim 5 \text{ P}_{\text{atm}}$

6. Un fluide est newtonien si la force de viscosité s'écrit : $dF = \eta \frac{dU}{dz} dS \Rightarrow \tau = \frac{dF}{dS} = \eta \frac{dU}{dz} \Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{dU}{dz} = \frac{\tau}{\eta}$, ce qui ne correspond pas à l'expression fournie du gradient des vitesses. **Le fluide n'est donc pas newtonien.**

7. $\dot{\gamma} = \frac{dU}{dz} = A_0 \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \tau_T^3$ donc le taux de cisaillement augmente avec la température à contrainte tangentielle donnée : **la glace est moins visqueuse à haute température.**

8. $U(z = 0) = 0$ par adhérence de la glace sur la paroi fixe rocheuse.

9. $\frac{dU}{dz} = A(T) \tau_T^3 = A(T) \times (\rho_{\text{glace}} g \sin \alpha)^3 \times z^3$
 $\Rightarrow U(z) = A(T) \times (\rho_{\text{glace}} g \sin \alpha)^3 \times \frac{z^4}{4} + cste$
 $U(z = 0) = 0 \Rightarrow cste = 0$

On en déduit : $U(z) = A(T) \times (\rho_{\text{glace}} g \sin \alpha)^3 \times \frac{z^4}{4}$

10. $U(z = e) = A(T) \times (\rho_{\text{glace}} g \sin \alpha)^3 \times \frac{e^4}{4} \Rightarrow \text{AN : } U(z = e) = 3,9 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,9 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

On retrouve une valeur du même ordre de grandeur qu'à la question 9.