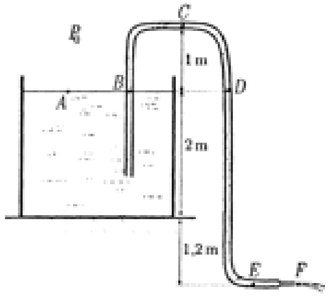
TD Physique n°8 : Dynamique des fluides

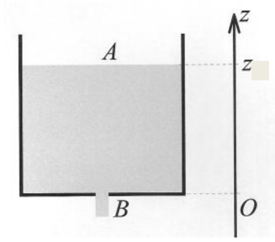
Exercice 1 : Vidange d'un récipient à l'aide d'un siphon



- *Pour vider l'eau d'une citerne, on utilise un siphon formé d'un tube coudé de section intérieure $S = 7\ cm^2$ terminé par un embout de section $s = 5\ cm^2$ (cf figure). On indique que la section de la surface libre (en A) est très grande devant S et s.*
- *On supposera le régime permanent et on prendra Po = 1 bar pour la pression atmosphérique, $\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$ pour la masse volumique de l'eau et $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$. On considérera l'eau comme un fluide parfait et incompressible.*

1. Exprimer puis calculer la vitesse d'écoulement en F.
2. Calculer en m^3 par heure le débit du siphon.
3. Calculer et comparer les pressions en A et en B.
4. Calculer la pression en *C*. À quelle condition, sur P_c un siphon tel que celui-ci peut-il fonctionner ?

Exercice 2 : Vidange d'un réservoir en régime lentement variable



- *Un récipient cylindrique de hauteur H est rempli d'eau, liquide parfait et incompressible, jusqu'à une hauteur h. Le sommet du récipient de section S est ouvert à l'air libre. La pression atmosphérique régnant pendant l'expérience est P_0.*
- *A l'instant initial, on ouvre l'orifice circulaire (B), de section s, au fond du réservoir ; cette section est considérée comme petite devant S, la section du sommet de la clepsydre.*
- *On note v_A la vitesse de descente de la surface libre et v_B la vitesse de sortie de l'eau.*
- *<u>Données :</u> H = 50 cm, h = 40 cm, S = 2830 cm², s = 1 cm² et g = 10 m/s².*

1. Exprimer la vitesse $v_B(t)$ en fonction de g et z(t), côte de la surface libre.
2. Exprimer l'équation différentielle à laquelle obéit z(t). En déduire l'expression traduisant les variations de z(t).
3. Déterminer la durée T de vidange du réservoir.

Exercice 3 : Cheminée

On s'intéresse à l'évacuation des effluents gazeux par une cheminée d'usine. Tous les gaz considérés obéissent à l'équation d'état des gaz parfaits ; on notera respectivement T, P et μ, la température, la pression et la masse volumique. A la base de la cheminée considérée, la vitesse initiale des effluents gazeux est nulle.

1. En admettant que l'écoulement de ces gaz est incompressible (isovolume), permanent et non visqueux, exprimer la vitesse d'éjection v_S des gaz en haut de la cheminée en fonction de la hauteur h de la cheminée, de la différence de pression $\Delta P = P_{sol} - P(h)$ entre le bas et le haut de cette cheminée, de la masse volumique μ des gaz, supposée uniforme dans la cheminée et de g, accélération de la pesanteur. Les pressions en bas et au sommet de la cheminée sont celles de l'air extérieur.

2. En supposant l'air en équilibre statique et la température extérieure uniforme T_0, relier la pression extérieure à l'altitude z. On écrira cette relation en fonction de la pression au sol P_{sol}, de la masse molaire M_{air}, de la constante de gaz parfaits R, de la température extérieure T_0 et de g.

La hauteur de la cheminée est $h = 30m$. Le gaz à l'intérieur de la cheminée est à la température uniforme $T_i = 200°C$. Le gaz est constitué de 72% d'air chaud, de 12% de vapeur d'eau et de 16% de dioxyde de carbone (pourcentages molaires). La température de l'air extérieur est $T_0 = 10°C$. On donne : $M_{air} = 29\ g.mol^{-1}$; $M_{eau} = 18\ g.mol^{-1}$: $M_{CO_2} = 44\ g.mol^{-1}$; $P_{sol} = 1{,}00\ bar$ et $R = 8{,}31\ J.mol^{-1}.K^{-1}$.

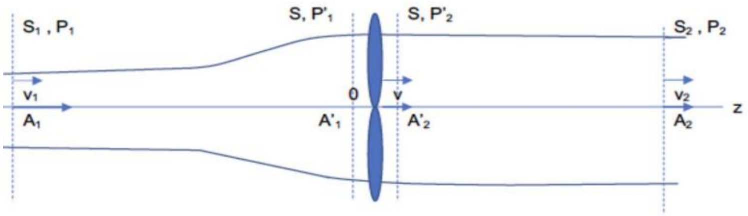
3. Calculer ΔP puis la masse molaire des gaz ainsi que leur masse volumique au niveau du bas de la cheminée. Justifier que cette valeur peut être considérée constante dans la cheminée.

4. Calculer la vitesse v_S du gaz à la sortie de la cheminée. Des mesures effectuées montrent que cette vitesse est en réalité inférieure. Quelle raison peut être envisagée pour l'expliquer ?

5. Le débit volumique des gaz à évacuer est de $1{,}0.10^5\ m^3.h^{-1}$. Quel doit être le diamètre intérieur de la cheminée cylindrique ?

Exercice 4 : Puissance d'une éolienne

On s'intéresse à l'étude du rendement d'une éolienne. On rappelle qu'une éolienne est un dispositif qui transforme l'énergie cinétique du vent en énergie mécanique, le plus souvent transformée ensuite en énergie électrique. L'éolienne de surface S est située à l'origine O d'un axe Oz horizontal. La figure ci-dessous montre l'écoulement d'air de part et d'autre de l'éolienne :



On note v_1 et v_2 la vitesse du vent en amont et en aval de l'éolienne. On suppose également que la pression est égale à la pression atmosphérique P_0 sur ces deux surfaces S_1 et S_2 : $P_1 = P_2 = P_0$. On se place dans les conditions d'application de la relation de Bernoulli. On note ρ la masse volumique de l'air. On considère une ligne de courant où figure quatre points : A_1 loin de l'éolienne en amont, A'_1 immédiatement avant l'éolienne, A'_2 immédiatement après et A_2 loin de l'éolienne en aval.

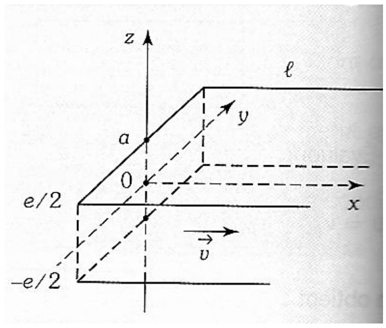
1. Justifier, à l'aide de la conservation du débit volumique qu'il ne peut y avoir de discontinuité de la vitesse au niveau de l'éolienne. On notera v cette vitesse.

C'est donc une discontinuité de pression de part et d'autre de l'éolienne qui permet son fonctionnement.

2. Écrire la relation de Bernoulli entre A_1 et A'_1 puis entre A'_2 et A_2. Pourquoi ne peut-on pas écrire la relation de Bernoulli entre les points A'_1 et A'_2 ?
3. En déduire l'expression de la différence de pression $P'_1 - P'_2$ en fonction de ρ, v_1 et v_2.
4. La force exercée par le vent sur les pâles de l'éolienne vaut $F = (P'_1 - P'_2) \times S$. En déduire l'expression de la puissance $\mathcal{P}$ développée par cette force sur les pâles.

Exercice 5 : Ecoulement de Couette plan

- *Soit l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux incompressible (masse volumique ρ), newtonien, de viscosité dynamique η de champ de vitesse $\vec{v} = v(z)\overrightarrow{u_x}$.*
- *L'écoulement s'effectue entre deux parois horizontales planes fixes, parallèles d'équation z =+- e/2.*
- *On supposera qu'il existe un gradient de pression uniforme dP / dx = - K, négatif suivant l'axe des x.*
- *On considère que le régime permanent est établi et on néglige les forces de pesanteur.*



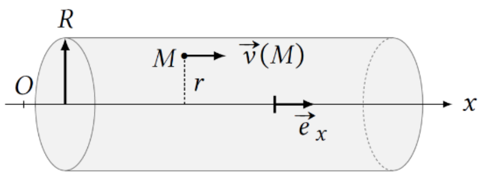
1. Etablir, par un bilan de quantité de mouvement que $\dfrac{d^2v}{dz^2} = -\dfrac{K}{\eta}$, déterminer v(z) ainsi que le débit volumique D_v. Donner le profil du champ des vitesses entre les deux parois.
2. En déduire l'expression de la vitesse moyenne de l'écoulement v_{moy}. Comparer v_{moy} à $v_o = v(0)$.
3. *On donne η = 1,0.10^{-3} Pl ; e = 2,0 mm ; K = 3,0.10^{2} Pa.m^{-1}.* L'hypothèse d'un écoulement laminaire est-elle vérifiée ?

Exercice 6 : Ecoulement de Poiseuille cylindrique

Données :

- Masse volumique de la glace : $\rho_g = 0{,}917 \times 10^3\ kg \cdot m^{-3}$
- Norme de l'accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$

Du fait de leur plasticité, les glaciers s'écoulent lentement sous l'effet de la gravité avec une vitesse d'écoulement très variable selon la pente, la topographie du lit rocheux ou l'épaisseur de la glace. La vitesse moyenne est de l'ordre de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres par jour, le record revenant au glacier Kangerdlugssuaq dans le Groënland où la vitesse moyenne atteinte est de 14 kilomètres par an. On se propose d'étudier, sur la base du modèle de Poiseuille, l'écoulement d'un glacier sous l'effet de la gravité.



On considère, dans un premier temps, l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux newtonien de viscosité dynamique η, incompressible de masse volumique ρ, dans une conduite cylindrique horizontale de rayon R, de longueur L et d'axe de symétrie de révolution (Ox). La pression en entrée de la conduite cylindrique est notée P_e, et celle en sortie $P_s < P_e$. Il règne alors dans la conduite un gradient de pression supposé uniforme, $\frac{\Delta P}{L}$, où $\Delta P = P_e - P_s$. En un point M de l'écoulement, la vitesse d'écoulement du fluide s'écrit : $\vec{v}(M) = v(r)\overrightarrow{e_x}$, où r est la distance entre le point M et l'axe (Ox) et $\overrightarrow{e_x}$ un vecteur unitaire orientant l'axe (Ox) (voir figure ci-dessus). On admet que le fluide adhère aux parois fixes de la conduite, ce qui se traduit par : $v(r = R) = 0$.

On considère le système fermé s'appuyant sur le cylindre de rayon $r < R$, d'axe de symétrie de révolution (Ox) et de longueur L.

1. **1.** Etablir, à partir d'un bilan de quantité de mouvement, que la vitesse d'écoulement dans la conduite cylindrique :
$$\vec{v}(M) = \frac{R^2 - r^2}{4\eta} \times \frac{\Delta P}{L}\overrightarrow{e_x}$$
2. **2.** En déduire l'expression du débit de volume Q en fonction de R, η et $\frac{\Delta P}{L}$
3. **3.** En déduire la dimension de la viscosité dynamique η en fonction des dimensions fondamentales suivantes : longueur, masse et temps.

On choisit de modéliser l'écoulement de la Mer de glace par l'écoulement de Poiseuille d'un fluide visqueux newtonien s'écoulant dans la moitié inférieure d'une conduite cylindrique sous le seul effet de la gravité.

4. Indiquer le système à définir ainsi que les forces extérieures à considérer pour établir ce profil de vitesse. Préciser les projections de ces forces selon $\overrightarrow{e_x}$ en fonction des données du système. On négligera les forces s'exerçant sur la surface libre de la glace. Montrer alors que le profil de vitesse s'écrit : $\vec{v}(M) = \frac{R^2-r^2}{4\eta} \times \left(\rho_g g sin\alpha\right)\overrightarrow{e_x}$, où $\overrightarrow{e_x}$ est dirigé dans le sens de l'écoulement suivant l'axe de pente voisine de $\alpha = 11°$.

5. Exprimer selon ce modèle, la vitesse maximale v_{max} de l'écoulement en fonction de R, η, ρ_g, g et α.

6. A l'aide de la Figure ci-dessous, tracer l'allure du profil de vitesse, en surface, en fonction de la distance comptée depuis le centre du Glacier, marqué par une croix.

La répartition des vitesses en surface et dans une section transversale du Glacier du Tacul (tronçon de la Mer de glace à l'aplomb du refuge de l'Envers des Aiguilles) est représentée sur la figure suivante.

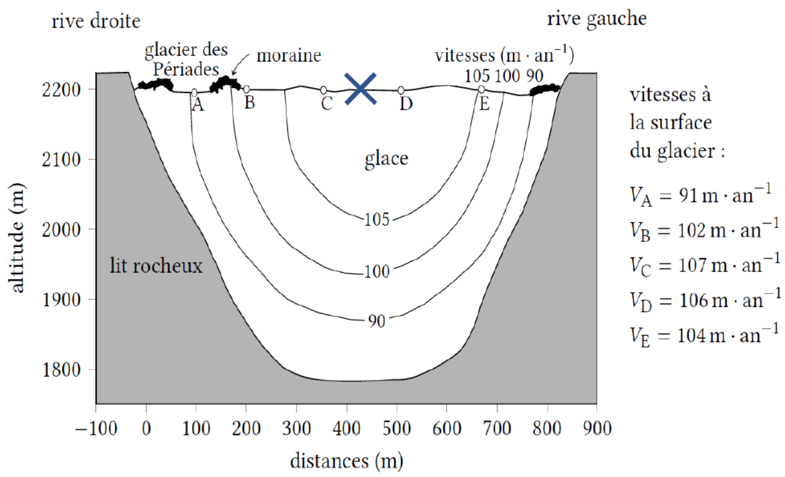


FIGURE 9 – Répartition des vitesses dans une section transversale du Glacier du Tacul.

La figure montre que la vitesse est pratiquement constante en surface au centre, par contre, elle varie très rapidement dans la centaine de mètres près des rives, pour tomber à quelques mètres par an de glissement sur les bords. En profondeur, les courbes d'égales vitesses peuvent être schématisées par des cercles concentriques.

7. En considérant la modélisation de l'écoulement du Glacier par un écoulement de Poiseuille comme valable, et en utilisant les données quantitatives disponibles dans le document 2 et en particulier sur la figure 9, proposer une estimation de l'ordre de grandeur de la viscosité dynamique de la glace. Comparer l'ordre de grandeur obtenu avec la valeur estimée usuelle de la viscosité de la glace de l'ordre de $10^{13}\ Pa \cdot s$.

8. Exprimer puis donner la valeur numérique du nombre de Reynolds de l'écoulement. On considérera que la vitesse moyenne de l'écoulement vaut la moitié de la vitesse maximale de l'écoulement. Préciser alors la nature de l'écoulement. Commenter.

Exercice 7 : Circulation sanguine et résistances hydrauliques

On considère l'écoulement d'un fluide réel dans un cylindre de rayon R et de longueur L. La viscosité dynamique du fluide s'écoulant dans ce cylindre sera notée η. On considère les conditions de validité de la loi de Poiseuille respectées. On notera $\Delta P = P_e - P_s > 0$, la différence de pression imposée entre l'entrée et la sortie de ce capillaire.

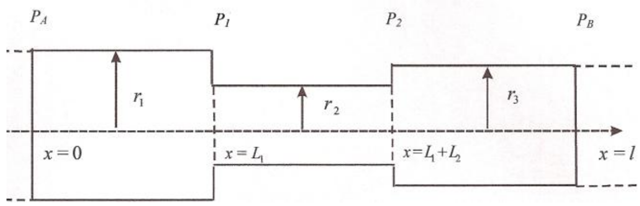
1. **a.** Déterminer la vitesse moyenne v_{moy} de l'écoulement du sang dans un capillaire où $\eta = 4{,}5.10^{-3}$ Pl, R = 10 μm, L = 1,0 mm et $\Delta P = 1{,}0.10^3$ Pa.

b. Sachant que la masse volumique du sang est $\rho = 1{,}05.10^3$ kg.m^{-3}, quelle est la nature de l'écoulement ?

c. *La vitesse moyenne du sang dans une artère où R = 2,0 mm et L = 10 cm vaut $v_{moy} = 2{,}6$ m.s^{-1}.* Calculer le débit volumique et la chute de pression régnant dans l'artère. Quelle est la nature de l'écoulement ?

2. **a.** Rappeler l'expression de la résistance hydraulique R_h en fonction de L, R et η.

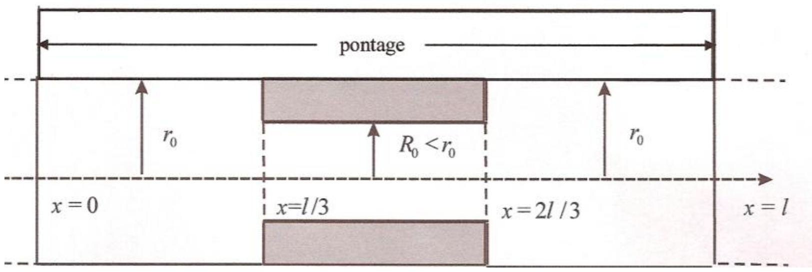
b. *Un tronçon cylindrique est constitué de trois portions cylindriques, de même axe, de rayons r_1, r_2 et r_3. Les pertes de charge au niveau des raccordements sont négligées. Les débits volumiques Q_A, Q_1, Q_2 et Q_B sont définis au travers des sections en $x_0 = 0$, $x_1 = L_1$, $x_2 = L_1 + L_2$ et $x_3 = l$.*



- Donner la relation existant entre Q_A, Q_1, Q_2 et Q_B.
- Exprimer la résistance hydraulique de l'ensemble en fonction de R_{h1}, R_{h2} et R_{h3}, les résistances hydrauliques de chacun des tronçons.
- Exprimer $P_1 - P_2$ en fonction de $P_A - P_B$, R_{h1}, R_{h2} et R_{h3}.

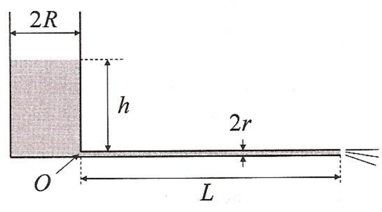
c. *Un pontage est réalisé afin de réparer une artère sténosée. Le pontage consiste à contourner l'obstacle à l'aide d'une tubulure mise en parallèle sur la totalité du tronçon. R_{Hp} est la résistance hydraulique du pontage de longueur l.*

Établir l'expression de la résistance hydraulique R_{He} équivalente de l'artère pontée.



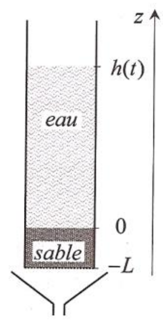
Exercice 8 : Viscosimètre à écoulement

- *Un liquide, de viscosité dynamique η, de viscosité cinématique ν et de masse volumique ρ, s'écoule d'un récipient cylindrique de rayon R, vers un tube cylindrique horizontal de longueur L et de rayon r << R.*
- *L'écoulement est suffisamment lent pour être considéré comme quasi-permanent.*



1. Expliquer pourquoi on peut écrire avec une bonne approximation : $P(O) = P_0 + \rho g h$, où P_0 est la pression atmosphérique.
2. Rappeler l'expression du débit volumique Q, donné par la loi de Poiseuille. On donnera les conditions de validité de cette loi.
3. Montrer alors que Q peut être mis sous la forme $Q(t) = A\,h(t)$. On exprimera le coefficient de proportionnalité A en fonction de g, r, L et ρ.
4. En appliquant la conservation du débit volumique, établir l'équation différentielle vérifiée par h(t) et en déduire la loi de vidange h(t).
5. Au bout de T = 13 minutes 30 secondes, la hauteur du dissolvant n'est plus que le tiers de la hauteur initiale h_0. En déduire la mesure de la viscosité cinématique de ce dissolvant à la température 20°C de l'expérience. *Données : $h_0 = 50$ cm ; r = 0,5 mm ; R = 2,0 cm ; L = 50 cm ; $\rho = 720$ kg.m^{-3}.*

Exercice 9 : Perméamètre



- *Un perméamètre est représenté sur la figure ci-contre. Une épaisseur L = 20 cm d'un milieu poreux constitué de sable est introduite dans un cylindre de section S = $3,0.10^{-2}$ m^2 d'axe Oz vertical ascendant. L'origine des ordonnées est prise à la surface supérieure du sable. Le cylindre est fermé en bas par une toile métallique recouverte de coton.*
- *On verse de l'eau au sommet du sable (l'eau est un fluide incompressible newtonien de viscosité dynamique η = $1,0.10^{-3}$ Pa.s et de masse volumique ρ = $1,0.10^{3}$ $kg.m^{-3}$). Lorsque la première goutte d'eau a traversé le perméamètre, la hauteur d'eau est h_0 = 1,0 m. On observe ensuite une diminution de la hauteur d'eau h (t). L'expérience est réalisée avec h > 0 (ce qui signifie que le sable est toujours recouvert d'eau).*
- *L'écoulement est suffisamment lent pour être supposé quasi permanent et le gradient de pression est supposé uniforme dans chacun des fluides.*
- *Le sable est considéré comme un milieu poreux contenant n pores cylindriques par unité de surface d'aire A.*

1. Exprimer la porosité Φ du sable en fonction des données de l'énoncé.

2. Justifier que le débit volumique dans le sable s'écrit : $Q = S\dfrac{k}{\eta}\left(\dfrac{\Delta P}{L} + \rho g\right)$. On donnera l'expression de k en fonction des données de l'énoncé.

3. Justifier que le gradient de pression dans le sable peut s'écrire avec une bonne approximation : $\dfrac{\Delta P}{L} = \dfrac{\rho g h}{L}$

4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par h (t) en introduisant un temps τ caractéristique. Résoudre cette équation. Déterminer la valeur de h ($t \to +\infty$). Commentez cette valeur.

5. La surface z = 0 du sable s'assèche au bout d'un temps t_0 = 366 s. En déduire la valeur du temps τ, puis celle de la perméabilité *k* du sable.