Correction TD Physique n°8 : Dynamique des fluides

Exercice 1 : Vidange d'un récipient à l'aide d'un siphon

1. **Conservation du débit volumique** (ES, EI, vitesse uniforme sur une section ⊥ à l'écoulement) :
$D_v = v_F s = v_A S_A \Rightarrow v_A = v_F \times \left(\frac{s}{S_A}\right) \ll v_F$
Relation de Bernoulli (ES, EI, EP, uniquement forces pressantes et de pesanteur) :
$A \longrightarrow F : \frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{P_F}{\rho} + \frac{1}{2}v_F^2 + gz_F$ avec $P_A = P_F = P_0$ et $v_A \ll v_F$
$\Rightarrow \frac{1}{2}v_F^2 = g(z_A - z_F) \Rightarrow \boldsymbol{v_F = \sqrt{2g(z_A - z_F)}}$ AN : $\boldsymbol{v_F = 7,9\ m \cdot s^{-1}}$

2. $\boldsymbol{D_v = v_F s}$ AN : $\boldsymbol{D_v = 7,9 \times 5 \times 10^{-4} = 4,0 \times 10^{-3}\ m^3 \cdot s^{-1} = 14,3\ m^3 \cdot h^{-1}}$

3. **Relation de Bernoulli :** $A \longrightarrow C : \frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{P_C}{\rho} + \frac{1}{2}v_C^2 + gz_C$ avec $P_A = P_0$, et $v_A \ll v_C = \frac{D_v}{s}$
$\Rightarrow \boldsymbol{P_C = P_A - \rho g(z_C - z_A) - \frac{1}{2}\rho \times \left(\frac{D_v}{s}\right)^2}$ AN : $\boldsymbol{P_C = 8,7 \times 10^4\ Pa}$
Le siphon peut fonctionner tant qu'il n'y a pas de bulles de vapeur d'eau en C, donc tant que $\boldsymbol{P_C > P_{vap}}$

Exercice 2 : Vidange d'un réservoir en régime lentement variable

1. **Conservation du débit volumique** (ES, EI, vitesse uniforme sur une section ⊥ à l'écoulement) :
$D_v = v_B s = v_A S \Rightarrow v_A = v_B \times \left(\frac{s}{S}\right) \ll v_B$
Relation de Bernoulli (ES, EI, EP, uniquement forces pressantes et de pesanteur) :
$A \longrightarrow B : \frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B$ avec $P_A = P_B = P_0$ et $v_A \ll v_B$
$\Rightarrow \frac{1}{2}v_B^2 = gz(t) \Rightarrow \boldsymbol{v_B = \sqrt{2gz(t)}}$

2. $D_v = v_B s = v_A S = -\frac{dz}{dt}S \Rightarrow v_B = -\frac{S}{s}\frac{dz}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{\sqrt{2gz(t)} = -\frac{S}{s}\frac{dz}{dt}}$
Séparation de variables : $\frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}dt \Rightarrow \int_h^z \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\int_0^t dt \Rightarrow \left[2\sqrt{z}\right]_h^z = -\frac{s}{S}\sqrt{2g} \times [t]_0^t$
$\Rightarrow 2 \times \left(\sqrt{z} - \sqrt{h}\right) = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}t \Rightarrow \boldsymbol{z(t) = \left(\sqrt{h} - \frac{s\sqrt{g}}{S\sqrt{2}}t\right)^2}$

3. $z(t = T) = 0 \Rightarrow \sqrt{h} - \frac{s\sqrt{g}}{S\sqrt{2}}T = 0 \Rightarrow \sqrt{h} = \frac{s\sqrt{g}}{S\sqrt{2}}T \Rightarrow \boldsymbol{T = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h}{g}}}$ AN : $\boldsymbol{T = 800\ s = 13,3\ min}$

Exercice 3 : Cheminée

1. **Relation de Bernoulli** (ES, EI, EP, uniquement forces pressantes et de pesanteur) :
$E \longrightarrow S : \frac{P_{sol}}{\mu} + \frac{1}{2}v_{sol}^2 + gz_{sol} = \frac{P(h)}{\mu} + \frac{1}{2}v_S^2 + gh$ avec et $v_{sol} = 0$ et $z_{sol} = 0$
$\Rightarrow \frac{P_{sol}}{\mu} = \frac{P(h)}{\mu} + \frac{1}{2}v_S^2 + gh \Rightarrow \boldsymbol{v_S = \sqrt{2 \times \left(\frac{P_{sol} - P(h)}{\mu} - gh\right)}}$

2. Avec un axe (Oz) ascendant :
$dP = -\mu_{air} g dz = -\frac{PM_{air}}{RT_0} g dz \Rightarrow \int_{P_{sol}}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{M_{air}g}{RT_0}\int_0^z dz \Rightarrow ln\left(\frac{P(z)}{P_{sol}}\right) = -\frac{M_{air}g}{RT_0}z \Rightarrow \boldsymbol{P(z) = P_{sol}e^{-\frac{M_{air}g}{RT_0}z}}$

3. $\Delta P = P_{sol} - P(h) = P_{sol} - P_{sol}e^{-\frac{M_{air}g}{RT_0}h} \Rightarrow \Delta P = P_{sol} \times \left(1 - e^{-\frac{M_{air}g}{RT_0}h}\right)$
AN : $\boldsymbol{\Delta P = 362\ Pa}$ ($P_{sol} = 1,0 \times 10^5\ Pa$)

$M_{gaz} = x_{eau}M_{eau} + x_{CO_2}M_{CO_2} + x_{air}M_{air}$ AN : $\boldsymbol{M_{gaz} = 30\ g.mol^{-1}}$

$\mu = \frac{P_{sol}M_{gaz}}{RT_i}$ AN : $\boldsymbol{\mu = 0,76\ kg.m^{-3}}$
La différence de pression étant faible entre le bas et le haut de la cheminée ($\Delta P = 362\ Pa$), la masse volumique des gaz peut être considérée comme constante dans la cheminée

4. $v_S = \sqrt{2 \times \left(\frac{P_{sol} - P(h)}{\mu} - gh\right)}$ AN : $\boldsymbol{v_S = 19\ m \cdot s^{-1}}$

La vitesse réelle est inférieure car l'écoulement des gaz dans la cheminée ne peut être considéré comme parfait.

5. $D_v = v_S S = v_S \times \left(\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2\right) \Longrightarrow \boldsymbol{D = 2\sqrt{\frac{D_v}{\pi v_S}}}$ AN : $\boldsymbol{D = 2\sqrt{\frac{1{,}0\times 10^5/3600}{\pi \times 19}} = 1{,}4\ m}$

Exercice 4 : Puissance d'une éolienne

1. Conservation du débit volumique (conditions de validité : écoulement stationnaire + fluide (écoulement) incompressible) : $D_v = cste = v_{A'_1} S = v_{A'_2} S \Longrightarrow v_{A'_1} = v_{A'_2} = v = cste$, la vitesse étant considérée uniforme sur la section perpendiculaire à l'écoulement
2. En considérant un axe (Oz) ascendant, la relation de Bernoulli devient : $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = cste$

   En l'appliquant sur la ligne de courant entre A_1 et A'_1, on obtient : $\frac{P_{A_1}}{\rho} + \frac{1}{2}v_{A_1}^2 + gz_{A_1} = \frac{P_{A'_1}}{\rho} + \frac{1}{2}v_{A'_1}^2 + gz_{A'_1}$

   En l'appliquant sur la ligne de courant entre A_2 et A'_2, on obtient : $\frac{P_{A_2}}{\rho} + \frac{1}{2}v_{A_2}^2 + gz_{A_2} = \frac{P_{A'_2}}{\rho} + \frac{1}{2}v_{A'_2}^2 + gz_{A'_2}$

   Il n'est pas possible d'écrire la relation de Bernoulli entre les points A'_1 et A'_2 en raison de la présence d'une pièce mobile entre ces deux points (éolienne)
3. $\frac{P_{A_1}}{\rho} + \frac{1}{2}v_{A_1}^2 + gz_{A_1} = \frac{P_{A'_1}}{\rho} + \frac{1}{2}v_{A'_1}^2 + gz_{A'_1} \Rightarrow \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{P'_1}{\rho} + \frac{1}{2}v^2\ (z_{A_1} = z_{A'_1})$

   $\Longrightarrow P'_1 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v^2$

   $\frac{P_{A_2}}{\rho} + \frac{1}{2}v_{A_2}^2 + gz_{A_2} = \frac{P_{A'_2}}{\rho} + \frac{1}{2}v_{A'_2}^2 + gz_{A'_2} \Rightarrow \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{P'_2}{\rho} + \frac{1}{2}v^2\ (z_{A_2} = z_{A'_2})$

   $\Longrightarrow P'_2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v^2$

   $\Rightarrow \boldsymbol{P'_1 - P'_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right)}$
4. $\boldsymbol{\mathcal{P} = Fv = (P'_1 - P'_2).Sv = \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right)Sv}$

Exercice 5 : Ecoulement de Couette plan

1. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

   Système : couche de fluide de dimensions $a \times \ell$ comprise entre z et $z + dz$

   Forces extérieures : Force de viscosité exercée par la couche supérieure en $z + dz$:

   $\overrightarrow{F_{visc}(z+dz)} = +\eta\left(\frac{dv}{dz}\right)_{z+dz} S\overrightarrow{u_x} = +\eta\left(\frac{dv}{dz}\right)_{z+dz} a\ell\overrightarrow{u_x}$ (fluide newtonien)

   Force de viscosité exercée par la couche supérieure en z :

   $\overrightarrow{F_{visc}(z)} = -\eta\left(\frac{dv}{dz}\right)_z S\overrightarrow{u_x} = -\eta\left(\frac{dv}{dz}\right)_z a\ell\overrightarrow{u_x}$ (fluide newtonien)

   Force pressante en $x = 0$:

   $\overrightarrow{F_P(x=0)} = P_e S'\overrightarrow{u_x} = P_e a dz\overrightarrow{u_x}$

   Force pressante en $x = \ell$:

   $\overrightarrow{F_P(x=\ell)} = -P_s S'\overrightarrow{u_x} = -P_s a dz\overrightarrow{u_x}$

   Remarque : le poids est négligé ainsi que les forces pressantes axiales (la pression étant uniforme, elles se compensent)

   Bilan de quantité de mouvement en régime stationnaire : $D_m(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e}) = \overrightarrow{F_{ext}}$

   Or $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_e}$, car $\vec{v}$ ne dépend pas de x (écoulement laminaire plan), on obtient donc : $\boldsymbol{\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}}$

   $\Longrightarrow \overrightarrow{F_{visc}(z+dz)} + \overrightarrow{F_{visc}(z)} + \overrightarrow{F_P(x=0)} + \overrightarrow{F_P(x=\ell)} = \vec{0}$

   $\Longrightarrow +\eta\left(\frac{dv}{dz}\right)_{z+dz} a\ell - \eta\left(\frac{dv}{dz}\right)_z a\ell + P_e a dz - P_s a dz = 0$

   $\Longrightarrow \eta\left[\left(\frac{dv}{dz}\right)_{z+dz} - \left(\frac{dv}{dz}\right)_z\right] a\ell + (P_e - P_s) a dz = 0$

$$\Rightarrow \eta\ell\left[\frac{d\left(\frac{dv}{dz}\right)}{dz}dz\right] + (P_e - P_s)dz = 0 \Rightarrow \eta\ell\frac{d^2v}{dz^2} + (P_e - P_s) = 0 \Rightarrow \frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{(P_e - P_s)}{\eta\ell} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{K}{\eta}}$$

2. $\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{K}{\eta} \Rightarrow \frac{dv}{dz} = -\frac{K}{\eta}z + C \Rightarrow v(z) = -\frac{1}{2}\frac{K}{\eta}z^2 + Cz + D$
   CL : $v\left(z = \frac{e}{2}\right) = v\left(z = -\frac{e}{2}\right) = 0$ (adhérence aux parois)
   $\Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{K}{\eta}\left(\frac{e}{2}\right)^2 + C \times \frac{e}{2} + D = 0$ et $-\frac{1}{2}\frac{K}{\eta}\left(\frac{e}{2}\right)^2 - C \times \frac{e}{2} + D = 0$
   On en déduit : $-\frac{K}{\eta}\left(\frac{e}{2}\right)^2 + 2D = 0 \Rightarrow D = +\frac{1}{2}\frac{K}{\eta}\left(\frac{e}{2}\right)^2$ et $eC = 0 \Rightarrow C = 0$
   Bilan : $\boldsymbol{v(z) = \frac{K}{2\eta}\left(\left(\frac{e}{2}\right)^2 - z^2\right)}$

3. $D_v = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} v(z)dS = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} v(z)adz = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \frac{1}{2}\frac{K}{\eta}\left(\left(\frac{e}{2}\right)^2 - z^2\right)adz = \frac{1}{2}\frac{K}{\eta}a\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}}\left(\left(\frac{e}{2}\right)^2 - z^2\right)dz = \frac{1}{2}\frac{K}{\eta}a\left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 - z^2\right]_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}}$
   $$\Rightarrow D_v = \frac{1}{2}\frac{K}{\eta}a\left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} = \frac{1}{2}\frac{K}{\eta}a\left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 \times \frac{e}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^3 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{e}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{e}{2}\right)^3\right]$$
   $$\Rightarrow D_v = \frac{1}{2}\frac{K}{\eta}a\frac{4}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^3 \Rightarrow \boldsymbol{D_v = \frac{K}{12\eta}ae^3}$$

4. $D_v = v_{moy}ae \Rightarrow \boldsymbol{v_{moy} = \frac{K}{12\eta}e^2}$

5. $R_e = \rho\frac{UL_\perp}{\eta} = \rho\frac{v_{moy}e}{\eta} = \rho\frac{\frac{K}{12\eta}e^2 e}{\eta} \Rightarrow \boldsymbol{R_e = \frac{\rho K e^3}{12\eta^2}}$
   AN : $\boldsymbol{R_e = 200} < R_{ec} = 2000 - 3000$: l'écoulement peut bien être considéré comme laminaire

Exercice 6 : Ecoulement de Poiseuille cylindrique

1. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
   Système : cylindre de rayon $r < R$ et de longueur L
   Forces extérieures : Force de viscosité exercée par la couche supérieure en r : $\overrightarrow{f_v} = \eta\frac{dv}{dr}2\pi rL\overrightarrow{u_x}$ (fluide newtonien)
   Force pressante en entrée : $\overrightarrow{F_{p,amont}} = \pi r^2 P_e\overrightarrow{u_x}$
   Force pressante en sortie : $\overrightarrow{F_{p,aval}} = -\pi r^2 P_s\overrightarrow{u_x}$

   Écoulement stationnaire, incompressible et laminaire cylindrique : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{F_{p,amont}} + \overrightarrow{F_{p,aval}} + \overrightarrow{f_v} = \vec{0}$

   En projection sur l'axe (Ox), le fluide étant newtonien :
   $$\pi r^2 P_e - \pi r^2 P_S + \eta\frac{dv}{dr}2\pi rL = 0 \Rightarrow \eta\frac{dv}{dr}2\pi rL + \pi r^2(P_e - P_S) = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r}{2} \Rightarrow v = -\frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r^2}{2} + B$$
   La condition d'adhérence est $v(r = R) = 0$, donc : $B = -\frac{\Delta P}{\eta L}\frac{R^2}{4} \Rightarrow v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)$
   On obtient bien : $\boldsymbol{\vec{v}(M) = \frac{R^2 - r^2}{4\eta} \times \frac{\Delta P}{L}\overrightarrow{e_x}}$

2. $Q = \int_0^R v(r)2\pi rdr = \int_0^R \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)2\pi rdr = \frac{\Delta P\pi}{2\eta L}\int_0^R(R^2 r - r^3)dr = \frac{\Delta P\pi}{2\eta L}\left[\left(R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\right]_0^R = \frac{\Delta P\pi}{2\eta L}\frac{R^4}{4}$
   $$\Rightarrow \boldsymbol{Q = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta P}{L}R^4}$$

3. Système fermé s'appuyant sur le demi-cylindre de rayon $r < R = 410\ m$, d'axe de symétrie de révolution (Ox) et de longueur L.
   Bilan des forces s'exerçant sur ce système fermé :
   - la force de viscosité agissant sur le demi-cylindre extérieur : $\overrightarrow{f_v} = \eta\frac{dv}{dr}\pi rL\overrightarrow{e_x}$
   - le poids du système (moteur de l'écoulement est à considérer) : $\vec{P} = m_g\vec{g} = \rho_g V_g\vec{g} = \rho_g\frac{\pi r^2}{2}L\vec{g}$

   Écoulement stationnaire, incompressible et laminaire cylindrique : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{f_v} = \vec{0}$

Sur (Ox) : $\eta \frac{dv}{dr}\pi r L + \rho_g \frac{\pi r^2}{2} L g sin\alpha = 0 \Longrightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{\rho_g g sin\alpha}{2\eta} r \Longrightarrow v(r) = -\frac{\rho_g g sin\alpha}{4\eta} r^2 + A$

Adhérence aux parois : $v(r = R) = 0 \Longrightarrow A = \frac{\rho_g g sin\alpha}{4\eta} R^2$ $\Longrightarrow \boldsymbol{v(r) = \frac{\rho_g g sin\alpha}{4\eta} \times (R^2 - r^2)}$

4. $v(r) = \frac{\rho_g g sin\alpha}{4\eta} \times (R^2 - r^2) \Longrightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{\rho_g g sin\alpha}{2\eta} r$ qui s'annule pour $r = 0$
La vitesse maximale vaut donc : $\boldsymbol{v_{max} = v(r = 0)} = \boldsymbol{\frac{\rho_g g sin\alpha R^2}{4\eta}}$

5. $v_{max} = \frac{\rho_g g sin\alpha R^2}{4\eta} \Longrightarrow \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\frac{\rho_g g sin\alpha R^2}{4 v_{max}}}$

avec : $v_{max} = 107\ m \cdot an^{-1} = 3{,}4 \times 10^{-6}\ m \cdot s^{-1}$; $R = 410\ m$; $\alpha = 11°$; $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$; $\rho_g = 0{,}917 \times 10^3\ kg \cdot m^{-3}$

AN : $\boldsymbol{\eta = 2,1 \times 10^{13}\ Pa \cdot s}$, ce qui correspond au bon ordre de grandeur de la viscosité dynamique.

6. $R_e = \frac{U \times L_\perp}{\eta} \rho_g$ avec $U = v_{moy}$ et $L_\perp = R = 410\ m$
AN : $\boldsymbol{R_e = 3,0 \times 10^{-14}} < R_{ec} = 2000 - 3000$

L'écoulement est donc bien laminaire (et même rampant), hypothèse nécessaire pour un écoulement de Poiseuille.

Exercice 7 : Circulation sanguine et résistances hydrauliques

1. **a.** Loi de Poiseuille pour un écoulement horizontal : $D_V = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta P}{L} R^4 = v_{moy} S = v_{moy} \pi R^2 \Longrightarrow \boldsymbol{v_{moy} = \frac{1}{8\eta}\frac{\Delta P}{L} R^2}$
AN : $\boldsymbol{v_{moy} = 2,8 \times 10^{-3}\ m \cdot s^{-1} = 2,8\ mm \cdot s^{-1}}$

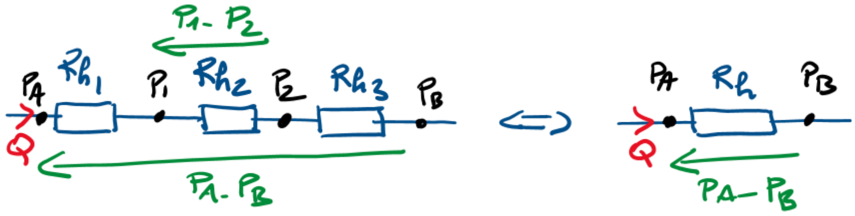
b. $R_e = \frac{U \times L_\perp}{\eta} \rho \Longrightarrow \boldsymbol{R_e = \frac{v_{moy} \times 2R}{\eta} \rho}$
AN : $\boldsymbol{R_e = 1,3 \times 10^{-2} < R_{ec} \sim 2000 - 3000}$ **: écoulement laminaire** (hypothèse nécessaire pour appliquer la loi de Poiseuille)

c. $\boldsymbol{D_V = v_{moy} S = v_{moy} \pi R^2 \Longrightarrow D_V = 3,3 \times 10^{-5}\ m^3 \cdot s^{-1}}$
Loi de Poiseuille pour un écoulement horizontal : $D_V = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta P}{L} R^4 \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta P = \frac{8\eta L D_V}{\pi R^4}} \Longrightarrow AN{:}\ \boldsymbol{\Delta P = 2,3 \times 10^3\ Pa}$
$\boldsymbol{R_e = \frac{v_{moy} \times 2R}{\eta} \rho} \Longrightarrow AN{:}\ \boldsymbol{R_e = 2,4 \times 10^3}$ **: difficile de conclure sur la nature de l'écoulement** (donc sur la pertinence d'utiliser la loi de Poiseuille)

2. **a.** $R_h = \frac{\Delta P^*}{D_v}$ Pour un écoulement horizontal : $R_h = \frac{\Delta P}{D_v} \Longrightarrow \boldsymbol{R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}}$ en considérant la loi de Poiseuille valide.

b. Les conditions de la loi de Poiseuille sont respectées donc l'écoulement est stationnaire et incompressible, par conséquent celui-ci ayant une entrée et une sortie, le débit volumique est constant : $\boldsymbol{Q_A = Q_1 = Q_2 = Q_B = Q}$

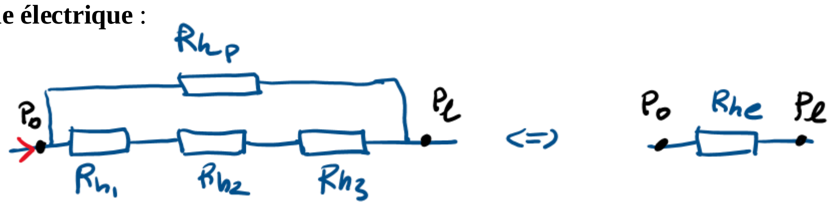
Analogie électrique :



Résistance équivalente : les trois tronçons sont associés « en série » : $\boldsymbol{R_h = R_{h1} + R_{h2} + R_{h3} = \frac{8\eta L_1}{\pi {r_1}^4} + \frac{8\eta L_2}{\pi {r_2}^4} + \frac{8\eta(\ell - L_1 - L_2)}{\pi {r_3}^4}}$

Analogie avec un pont diviseur de tension : $\boldsymbol{P_1 - P_2 = \frac{R_{h2}}{R_{h1} + R_{h2} + R_{h3}} (P_A - P_B)}$

c. Analogie électrique :



Résistance équivalente : $\frac{1}{R_{he}} = \frac{1}{R_{hp}} + \frac{1}{R_{h1}+R_{h2}+R_{h3}} \Rightarrow R_{he} = \frac{1}{\frac{1}{R_{hp}}+\frac{1}{R_{h1}+R_{h2}+R_{h3}}}$

Avec $R_{h1} + R_{h2} + R_{h3} = 2 \times \frac{8\eta\left(\frac{\ell}{3}\right)}{\pi {r_0}^4} + \frac{8\eta\left(\frac{\ell}{3}\right)}{\pi {R_0}^4} = \frac{8\eta\left(\frac{\ell}{3}\right)}{\pi {r_0}^4} \times \left(\frac{2}{{r_0}^4} + \frac{1}{{R_0}^4}\right)$ et $R_{hp} = \frac{8\eta\ell}{\pi {R_p}^4}$

Exercice 8 : Viscosimètre à écoulement

1. Dans le récipient cylindrique de rayon R, le fluide s'écoule très lentement et peut être considéré comme « statique ». La loi de statique des fluides, intégrée entre un point de la surface libre et le point O donne alors : $\boldsymbol{P(O) = P_0 + \rho g h}$

2. eVoir cours. Loi de Poiseuille pour un écoulement horizontal : $\boldsymbol{Q = \frac{\pi}{8\eta}\frac{P(O)-P_0}{L}r^4} = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\rho g h}{L}\boldsymbol{r^4}$ appliquée entre le point O et la sortie du tube horizontal $\Rightarrow \boldsymbol{Q = Ah}$ avec $\boldsymbol{A = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\rho g}{L}r^4}$

3. L'écoulement étant stationnaire : $Q = cst = Q_A$ où A est un point de la surface libre du récipient cylindrique de rayon R.
   Or : $Q_A = v_A S_A = v_A \pi R^2$ avec $v_A = -\frac{dh}{dt}$ $\Rightarrow Q = -\frac{dh}{dt} \times \pi R^2$
   D'après la loi de Poiseuille, on obtient alors : $Q = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\rho g h}{L}r^4 = -\frac{dh}{dt} \times \pi R^2 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dh}{dt} + \frac{\rho g r^4}{8\eta L R^2}h = 0}$
   Solution de l'équation différentielle : $h(t) = K \times e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\boldsymbol{\tau = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4}}$
   CI : $h(t=0) = h_0 \Rightarrow K = h_0 \Rightarrow \boldsymbol{h(t) = h_0 \times e^{-\frac{t}{\tau}}}$

4. $h(t=T) = \frac{h_0}{3} = h_0 \times e^{-\frac{T}{\tau}} \Rightarrow \frac{1}{3} = e^{-\frac{T}{\tau}} \Rightarrow -ln3 = -\frac{T}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4} = \frac{T}{ln3} \Rightarrow \boldsymbol{\eta = \frac{T\rho g r^4}{ln3 \times 8LR^2}}$
   AN : $\boldsymbol{\eta = 2,0 \times 10^{-4}\ Pl}$

Exercice 9 : Perméamètre

1. $\Phi = \frac{V_{pores}}{V_{total}} = \frac{N_{pores}AL}{SL} = \frac{nSAL}{SL} = nA$
2. En appliquant la loi de Poiseuille pour un écoulement vertical pour chaque pore cylindrique :
   $Q = N_{pores}q = nSq = nSq = nS\frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta P + \rho g L}{L}r^4 \Rightarrow \boldsymbol{Q = \frac{n\pi r^4}{8\eta}\left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g\right)S \Rightarrow k = \frac{n\pi r^4}{8}}$
   On retrouve ici la loi de Darcy pour un écoulement vertical

3. L'écoulement étant lent, on peut appliquer la loi de statique des fluides sur la colonne d'eau de hauteur h :
   $P(-L) = P_O = P(0) + \rho g h \Rightarrow \boldsymbol{\Delta P = P(0) - P(-L) = \rho g h}$

4. L'écoulement étant stationnaire : $Q = cst = Q_A$ où A est un point de la surface libre.
   Or : $Q_A = v_A S$ avec $v_A = -\frac{dh}{dt}$ $\Rightarrow \boldsymbol{Q = -\frac{dh}{dt} \times S}$

   En utilisant la loi de Darcy : $Q = \frac{n\pi r^4}{8\eta}\left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g\right)S = \frac{n\pi r^4}{8\eta}\left(\frac{\rho g h}{L} + \rho g\right)S = \frac{n\pi r^4 \rho g}{8\eta}\left(1 + \frac{h}{L}\right)S$
   $\Rightarrow -\frac{dh}{dt} \times S = \frac{n\pi r^4 \rho g}{8\eta}\left(1 + \frac{h}{L}\right)S \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dh}{dt} + \frac{n\pi r^4 \rho g}{8\eta L}h = -\frac{n\pi r^4 \rho g}{8\eta}}$ $\boldsymbol{\frac{1}{\tau} = \frac{n\pi r^4 \rho g}{8\eta L} = \frac{k\rho g}{\eta L} \Rightarrow \tau = \frac{\eta L}{k \rho g}}$
   $h(t) = C \times e^{-\frac{t}{\tau}} - L$

   CI : $h(t=0) = h_0 \Rightarrow C = h_0 + L \Rightarrow \boldsymbol{h(t) = (h_0 + L) \times e^{-\frac{t}{\tau}} - L}$ $\boldsymbol{\lim_{t \to +\infty} h = -L}$ **: le sable est complètement asséché**

5. $h(t_0) = 0 = (h_0 + L) \times e^{-\frac{t_0}{\tau}} - L \Rightarrow e^{-\frac{t_0}{\tau}} = \frac{L}{h_0 + L} \Rightarrow -\frac{t_0}{\tau} = ln\left(\frac{L}{h_0+L}\right) = -ln\left(\frac{h_0+L}{L}\right) = -ln\left(1 + \frac{h_0}{L}\right)$
   $\Rightarrow \boldsymbol{\tau = \frac{t_0}{ln\left(1+\frac{h_0}{L}\right)}}$ AN : $\boldsymbol{\tau = 204\ s}$ et $\boldsymbol{k = \frac{\eta L}{\rho g \tau}}$ AN : $\boldsymbol{k = 4,2 \times 10^{-6}\ m^2 = 4,2\ \mu m^2}$