

Bus électrique

Question simple

Soit un circuit RC, contenant en série un condensateur de capacité C , un conducteur ohmique de résistance R , et un interrupteur initialement ouvert. Le condensateur est initialement chargé : $u(t = 0^-) = E$. A $t = 0$, l'interrupteur est fermé.

- 1) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur. Etablir l'expression de u en fonction du temps.
- 2) Donner l'expression du temps caractéristique τ de la charge du condensateur. Donner l'expression de la durée du régime transitoire
- 3) Donner l'expression de l'énergie stockée dans le condensateur initialement chargé.

On considère l'association de deux condensateurs de capacité C_1 et C_2

- 4) Etablir que la capacité de l'association de ces deux condensateurs vaut :

$C_{eq} = C_1 + C_2$ si les deux condensateurs sont associés en parallèle

$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ si les deux condensateurs sont associés en série

Question ouverte

Une entreprise française, spécialisée dans la recherche de solutions de transports électriques, est à l'origine d'une solution innovante qui consiste à remplacer les batteries des bus électriques par des supercondensateurs. Les arrêts de bus sont composés d'une unité, appelée totem, qui contient également des supercondensateurs. Le principe est le suivant : à chaque arrêt, pendant le temps d'échange de passagers, un bras robotisé situé sur le toit du bus vient se raccorder automatiquement à un Totem accumulateur d'énergie intégré au mobilier urbain et alimenté par le réseau électrique standard. Le constructeur annonce que l'opération permet de recharger l'ensemble des modules de supercondensateurs du bus. Une fois l'opération effectuée, le bus dispose d'une autonomie lui permettant de rejoindre l'arrêt suivant où le rechargement se fera à nouveau.



Les concepteurs du bus électrique, initialement utilisé à l'aéroport Nice Côte d'Azur, ont estimé que l'énergie E_{base} nécessaire au bus pour relier les deux stations les plus éloignées de son circuit : $E_{base} = 1,038 \text{ kWh}$. Le transfert d'énergie entre le Totem et le bus doit s'effectuer en 10 secondes maximum. Cette phase, appelée « biberonnage », doit être parfaitement sécurisée. En effet, l'intensité du courant électrique peut atteindre plusieurs milliers d'ampères en début de transfert.

- 1) Discuter de la capacité du système à effectuer une recharge pendant l'arrêt du bus dans la station. Estimer la valeur de l'intensité électrique au début du biberonnage.
- 2) Le bus électrique quitte le Totem. Lors d'une première phase, le bus accélère, pour atteindre sa vitesse de croisière $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans cette phase d'accélération, on modélise l'accélération sous la forme : $a = a_{max} \times \left(1 - \frac{v}{v_0}\right)$ où $a_{max} = 1,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Dans une seconde phase, le bus évolue à vitesse de croisière constante et égale à $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

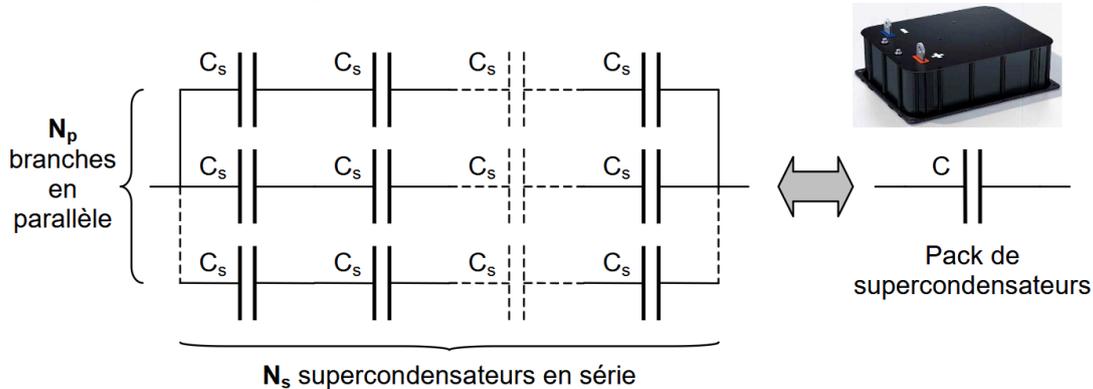
Compléter le programme Python fourni qui permet de faire afficher l'évolution temporelle de la force motrice nécessaire à la propulsion et à l'avancement du bus, ainsi que la puissance motrice associée.

Document 1 : Capacité d'un supercondensateur

Un supercondensateur est constitué de deux électrodes poreuses, généralement en charbon actif et imprégnées d'électrolyte, qui sont séparées par une membrane isolante et poreuse (pour assurer la conduction ionique). Sa capacité peut être estimée selon la formule $C = \frac{\epsilon S}{e}$, où ϵ est la permittivité diélectrique de l'électrolyte, S la surface de la membrane et e la distance entre les deux électrodes. Les valeurs pour le supercondensateur sont : $e = 1,0 \times 10^{-9} \text{ nm}$, $S = 1,0 \text{ m}^2$ et $\epsilon = 1,5 \times 10^{-7} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Document 2 : Pack de supercondensateurs

Dans la pratique, on doit associer en série et en parallèle les supercondensateurs afin de réaliser le pack de supercondensateurs. On note N_s le nombre de supercondensateurs en série et N_p le nombre de branches en parallèle.



On considère qu'un pack de supercondensateurs ne peut se décharger au-delà de 50% de sa tension nominale (tension maximale à ses bornes).

Document 3 : Caractéristiques du Totem

- Le Totem est constitué par association en dérivation de 2 branches constituées chacune de 14 modules de supercondensateurs raccordés en série. La tension nominale (maximale) aux bornes de chaque module est de 54 V.
- Lors du transfert Totem → Bus, les pertes par effet Joule, atteignent 80,7 Wh.
- La résistance interne équivalente pour le Totem est de 50 mΩ

Document 4 : Résistance au roulement et trainée

Force de résistance au roulement :

Au contact du bitume, le bus subit une résistance au roulement. Cette action mécanique de résistance est créée par les déformations au niveau des pneumatiques et de la chaussée. Elle est d'autant plus grande que le rayon du pneumatique est faible et que la déformation du pneu est grande (exemple : pneus sous gonflés). On peut modéliser cette action mécanique par la relation suivante : $F_{roulement} = -C_r \|\vec{P}\| \vec{u}$

où \vec{u} est un vecteur unitaire orienté dans le sens de déplacement du bus, $\|\vec{P}\|$ le poids du bus et C_r le coefficient de résistance au roulement du bus.

Pour le bus électrique, on donne les valeurs suivantes : $C_r = 0,008$

$$m = 12 \text{ t}$$

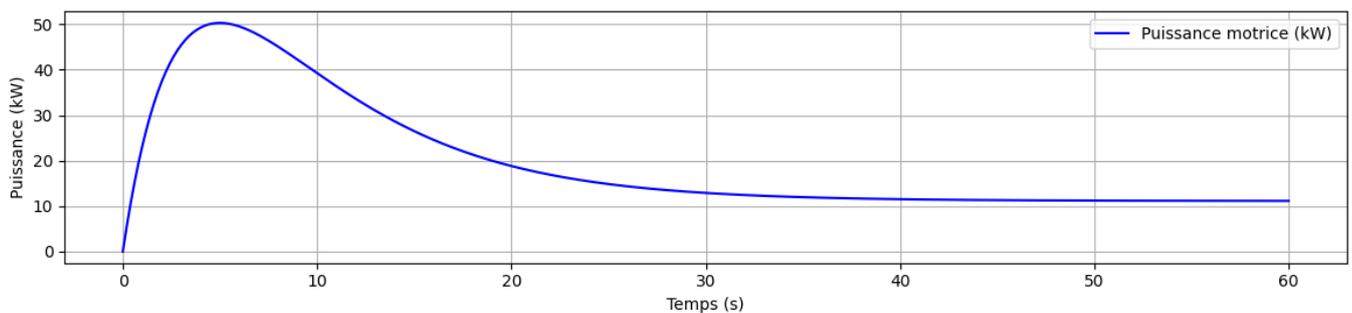
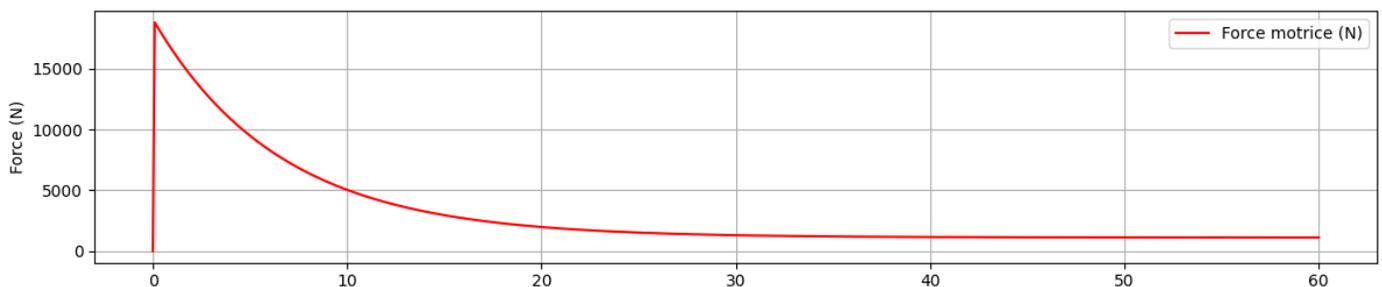
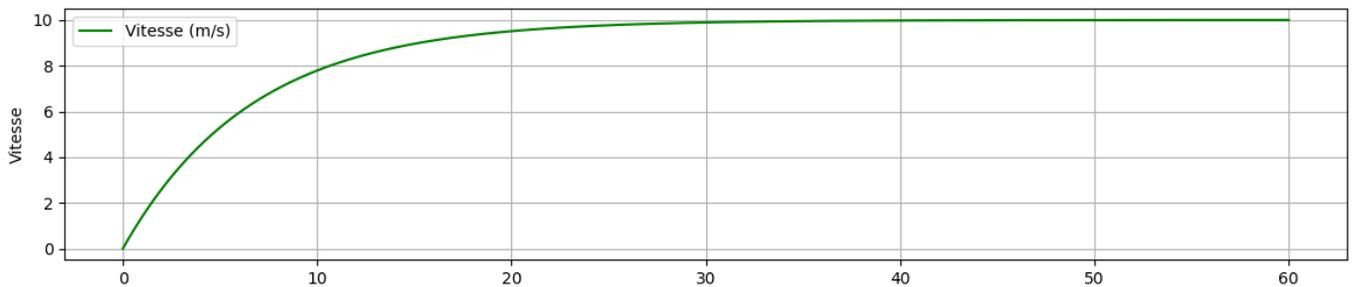
Trainée aérodynamique quadratique :

Le bus en mouvement subit une trainée aérodynamique quadratique. Pour le bus électrique, les paramètres sont les suivants :

- Coefficient de trainée $C_x = 0,70$
- Surface frontale du bus $S = 9,0 \text{ m}^2$
- Masse volumique de l'air $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Document 5 : Script Python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # --- Paramètres physiques du bus ---
5 m = 12000 # masse (kg)
6 g = 9.81 # gravité (m/s²)
7 Cr = 0.007 # coefficient de résistance au roulement
8 rho = 1.2 # densité de l'air (kg/m³)
9 Cd = 0.6 # coefficient de traînée
10 A = 8 # surface frontale (m²)
11 v_croisiere = 10 # vitesse cible (m/s)
12 a_max = 1.5 # accélération maximale au démarrage (m/s²)
13
14 # --- Paramètres de simulation ---
15 dt = 0.1 # pas de temps (s)
16 t_max = 60 # durée totale (s)
17 N = int(t_max / dt)
18
19 # --- Initialisation ---
20 t = np.linspace(0, t_max, N)
21 v = np.zeros(N)
22 a = np.zeros(N)
23 F_motrice = np.zeros(N)
24 P_motrice = np.zeros(N)
25
26 for i in range(1, N):
27     # Accélération
28     if v[i-1] < v_croisiere:
29         a[i] = a_max * (1 - v[i-1] / v_croisiere)
30     else:
31         a[i] = 0 # croisière
32
33     # Vitesse
34     v[i] = [redacted]
35
36     # Forces résistantes
37     F_roulement = Cr * m * g
38     F_traînee = 0.5 * rho * Cd * A * v[i]**2
39
40     # Force motrice nécessaire
41     F_motrice[i] = [redacted]
42
43     # Puissance motrice
44     P_motrice[i] = [redacted]
```



Question simple

1) Schéma du circuit orienté attendu

$$\text{LDM : } u + u_R = 0$$

$$\text{Loi sur R : } u + Ri = 0$$

$$\text{Loi sur C : } u + RC \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = 0$$

$$\Rightarrow u(t) = k \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$

par continuité de la tension aux bornes du condensateur : $u(t = 0^-) = u(t = 0^+) = E$

$$\Rightarrow k = E \Rightarrow u(t) = E \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2) $\tau = RC$ durée du régime transitoire : $\Delta t \approx 5\tau = 5RC$

3) $E_{\text{condensateur}} = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}CE^2$ initialement

4) **Condensateurs associés en parallèle**

$$\text{Loi des nœuds : } i = i_1 + i_2 = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad i = C_{\text{ext}} \frac{du}{dt}$$

$$\text{Bilan : } C_{\text{ext}} = C_1 + C_2$$

Condensateurs associés en série

$$\text{Additivité des tensions : } u = u_1 + u_2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} = \frac{i}{C_{\text{ext}}}$$

$$\text{Bilan : } \frac{1}{C_{\text{ext}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{\text{ext}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Question ouverte

1) Pour effectuer une recharge, il est nécessaire que le Totem transfère au bus l'énergie $E_{\text{base}} = 1,038 \text{ kWh}$ en 10 s maximum. Il faut donc déterminer l'énergie en kWh transférée du Totem au bus puis estimer le temps de décharge.

Capacité d'un supercondensateur : $C = \frac{\epsilon S}{e} = 150 \text{ F}$

Energie transférée du Totem au bus : charge entre U_{nominale} et $\frac{50}{100} \times U_{\text{nominale}}$ en tenant compte de l'effet Joule

$$E_{\text{transférée}} = E(U_{\text{nominale}}) - E\left(\frac{U_{\text{nominale}}}{2}\right) - E_{\text{Joule,Totem}}$$

$$E_{\text{transférée}} = \frac{1}{2}C_{\text{eq}}U_{\text{nominale}}^2 - \frac{1}{2}C_{\text{eq}}\left(\frac{U_{\text{nominale}}}{2}\right)^2 - E_{\text{Joule,Totem}} = \frac{3}{8} \times C_{\text{eq}} \times U_{\text{nominale}}^2 - E_{\text{Joule,Totem}}$$

Totem = association en dérivation de 2 branches constituées chacune de 14 modules de supercondensateurs raccordés en série. On indique que la tension nominale de chaque module vaut 54 V.

Donc (d'après la question simple) sur une branche :

$$C_{\text{eq,branche}} = \frac{C}{14} \quad (14 \text{ modules en série})$$

$$\text{sur le Totem (2 branches) : } C_{\text{eq}} = 2 \times C_{\text{eq,branche}} = \frac{C}{7} = \frac{150}{7} = 21,4 \text{ F}$$

$$\text{Par ailleurs, } U_{\text{nominale}} = 14 \times 54 = 756 \text{ V} \quad (14 \text{ modules en série})$$

$$\frac{3}{8} \times C_{\text{eq}} \times U_{\text{nominale}}^2 = \frac{3}{8} \times 21,4 \times 756^2 = 4,49 \times 10^6 \text{ J} = 4,49 \times 10^6 \text{ W} \cdot \text{s} = 1,28 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

$\Rightarrow E_{transférée} = 1,20 \text{ kW} \cdot \text{h} > E_{base}$ donc le système va bien pouvoir effectuer la recharge désirée d'un point de vue énergétique

Durée du transfert d'énergie Totem -> bus

On doit à présent contrôler si ce transfert s'effectue en 10s maximum. D'après la question simple :

$$u_{Totem}(t = 0) = U_{nominale} \text{ et } u_{Totem}(t = t_{décharge}) = \frac{U_{nominale}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{nominale}}{2} = U_{nominale} \times e^{-\frac{t_{charge}}{\tau}} \Rightarrow t_{décharge} = \tau \times \ln(2) = RC_{eq} \times \ln(2)$$

AN : $t_{charge} = 0,74 \text{ s} < 10 \text{ s}$, la recharge va bien pouvoir s'effectuer en moins de 10 s (elle est quasi immédiate)

Intensité électrique au début du biberonnage

$$i = C_{eq} \frac{du}{dt} = -C_{eq} \times \frac{1}{\tau} \times U_{nominale} \times e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow i(t = 0) = -\frac{U_{nominale} C_{eq}}{RC_{eq}} = -\frac{U_{nominale}}{R}$$

AN : $|i(t = 0)| = \frac{756}{0,050} = 15 \text{ kA}$ ce qui correspond bien à « plusieurs milliers d'ampères »

2) Référentiel : terrestre (galiléen)

Système : bus

Forces extérieures : \vec{P} , \vec{R} , $\vec{F}_{trainée}$, $\vec{F}_{roulement}$, $\vec{F}_{motrice}$

Principe fondamentale de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{trainée} + \vec{F}_{roulement} + \vec{F}_{motrice}$

En projetant sur un axe horizontal :

$$1^{\text{ère}} \text{ phase : } ma = -\frac{1}{2} \rho S C_x v^2 - mg C_r + F_{motrice}$$

$$\Rightarrow F_{motrice} = ma + F_{roulement} + F_{trainée} = ma + \frac{1}{2} \rho S C_x v^2 + mg C_r$$

$$\text{avec } a = a_{max} \times \left(1 - \frac{v}{v_0}\right)$$

$$2^{\text{ère}} \text{ phase : } a = 0 \Rightarrow F_{motrice} = F_{roulement} + F_{trainée} = -\frac{1}{2} \rho S C_x v^2 - mg C_r$$

Le programme donne selon la méthode d'Euler, pour chaque temps, l'accélération (pour chacune des phases), la vitesse, les forces de trainée et de roulement, la force motrice en utilisant les expressions ci-dessus, ainsi que la puissance motrice qui est égale à la force motrice multipliée par la vitesse. Le programme complété est alors :

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # --- Paramètres physiques du bus ---
5 m = 12000 # masse (kg)
6 g = 9.81 # gravité (m/s²)
7 Cr = 0.007 # coefficient de résistance au roulement
8 rho = 1.2 # densité de l'air (kg/m³)
9 Cd = 0.6 # coefficient de traînée
10 A = 8 # surface frontale (m²)
11 v_croisiere = 10 # vitesse cible (m/s)
12 a_max = 1.5 # accélération maximale au démarrage (m/s²)
13
14 # --- Paramètres de simulation ---
15 dt = 0.1 # pas de temps (s)
16 t_max = 60 # durée totale (s)
17 N = int(t_max / dt)
18
19 # --- Initialisation ---
20 t = np.linspace(0, t_max, N)
21 v = np.zeros(N)
22 a = np.zeros(N)
23 F_motrice = np.zeros(N)
24 P_motrice = np.zeros(N)
25
26 for i in range(1, N):
27     # Accélération
28     if v[i-1] < v_croisiere:
29         a[i] = a_max * (1 - v[i-1] / v_croisiere)
30     else:
31         a[i] = 0 # croisière
32
33     # Vitesse
34     v[i] = v[i-1] + a[i] * dt
35
36     # Forces résistantes
37     F_roulement = Cr * m * g
38     F_traînee = 0.5 * rho * Cd * A * v[i]**2
39
40     # Force motrice nécessaire
41     F_motrice[i] = m * a[i] + F_roulement + F_traînee
42
43     # Puissance motrice
44     P_motrice[i] = F_motrice[i] * v[i]
45

```