Le tympan

Question simple

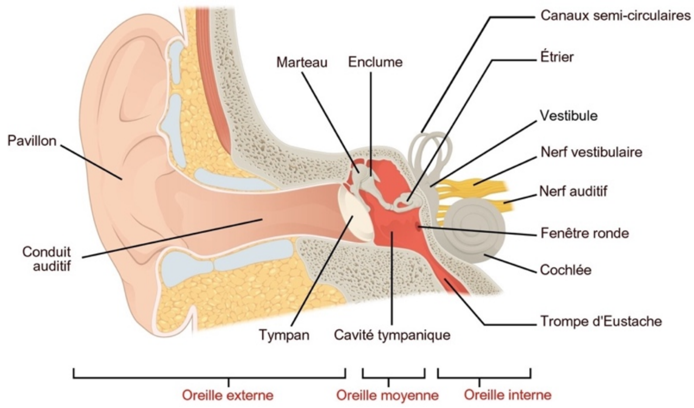
Établir, sous forme canonique, l'équation différentielle d'un oscillateur de type masse-ressort (masse m ; constante de raideur k) en présence de frottements fluides. Donner l'expression de sa solution en régime pseudo-périodique puis l'expression du temps caractéristique.

Question ouverte

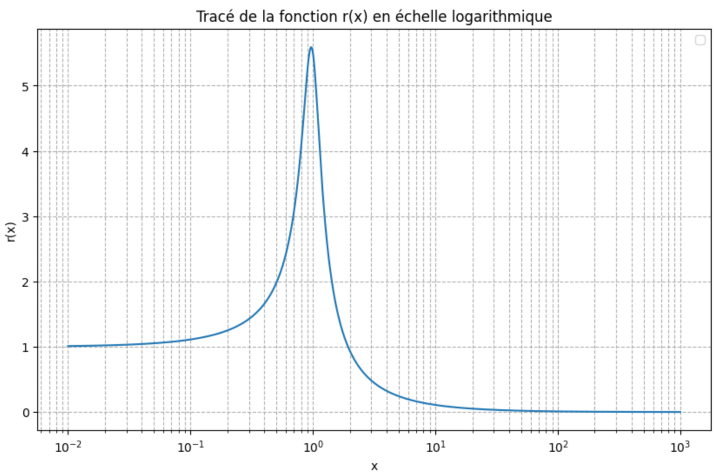
Proposer un modèle simple permettant d'expliquer la résonance mécanique du tympan lorsqu'il est soumis à un son de fréquence 1 kHz.

Document 1 : quelques généralités à propos du tympan

Le tympan est une membrane fibreuse séparant l'oreille externe et l'oreille moyenne. Le tympan est chargé de récolter les vibrations dues aux sons arrivant par le conduit auditif externe, et de les transmettre à la chaîne ossiculaire.



Document 2 : évolution de la grandeur $\boldsymbol{r(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{5{,}5}\right)^2}}}$ **avec** $\boldsymbol{x = \dfrac{\omega}{\omega_0}}$



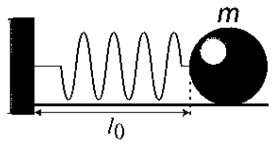
Données fournies en cours d'oral (mais pas vraiment utiles)

Masse du tympan	m = 0,10 mg
Surface du tympan	S = 60 mm^2
Constante de raideur	$k = 3 \times 10^3\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$

Correction

Question simple

On se place dans le référentiel de laboratoire supposé galiléen. Un objet de masse m réductible à un point matériel M est lié à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur *k*. A la date t = 0, le ressort est étiré en *x* = *x*$_0$ depuis sa position d'équilibre en *x* = 0 puis lâché sans vitesse initiale.



$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$$
$$-kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

Discriminant $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$

Relaxation pseudo-périodique $\Delta < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0$ soit $Q > \frac{1}{2}$

Deux racines complexes $r_{1,2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{4\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Solutions $x(t) = \exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)\,[A cos(\Omega t) + B sin(\Omega t)]$

Conditions initiales $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = 0$

Temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$

Question ouverte

- Le son reçu par l'oreille est modélisé par une surpression ΔP telle que $\Delta P = \frac{F}{S}$ avec $\vec{F} = F_m\cos(\omega t)\,\vec{u}_x$ ou encore $\vec{F} = P_m S\cos(\omega t)\,\vec{u}_x$
- Référentiel de laboratoire supposé galiléen ; Système {tympan}
- Application du PFD projeté sur l'axe (Ox) :

$$m\ddot{x} = (p_{atm} + \Delta P)S - p_{atm}S - \alpha\dot{x} - kx$$
$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{P_m S}{m}\cos(\omega t)$$
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P_m S}{m}\cos(\omega t)$$

Résolution de l'équation différentielle en passant par les nombres complexes

$$-\omega^2\underline{x} + j\,\frac{\omega\omega_0}{Q}\underline{x} + \omega_0^2\underline{x} = \frac{P_m S}{m}\exp(j\omega t)$$

$$\underline{x} = \frac{\frac{P_m S}{m}\exp(j\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\,\frac{\omega\omega_0}{Q}} \quad \text{avec } \underline{x} = X_m\exp(j\omega t + \phi) = \underline{X_m}\exp(j\omega t)$$

$$\underline{X_m} = \frac{\frac{P_m S}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\,\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{P_m S}{m}\cdot\frac{1}{\omega_0^2\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right]}$$

$$X_m = \frac{P_m S}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Résonance si X_m est maximal soit si le dénominateur est minimal. On pose $f(x) = (1 - x^2) + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$.

Expression de la dérivée $f'(x) = 2 \times (-2x) \times (1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2}$.

f' est minimale si $f'(x) = 0$ soit $\qquad 2x \times \left(-1 + x^2 + \frac{1}{Q^2}\right) = 0$

$x = 0$ n'a pas de sens physique (cela impliquerait l'absence d'oscillations)

Ainsi $\qquad -1 + x^2 + \frac{1}{Q^2} = 0 \Leftrightarrow\ x = \sqrt{1 - \frac{1}{Q2}}$

Si Qest assez grand, alors la résonance est observée pour $x \simeq 1$ et $\omega_r \simeq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Le document 2 permet d'avoir une idée du phénomène pour $Q = 5{,}5$. On peut vérifier qu'il y a bien résonnance pour $x \simeq 1$.