Pourcentage d’eau liquide dans la neige

Question simple

- Déterminer l’expression de la résistance thermique sur une portion de longueur L d’une couronne cylindrique infiniment longue sur un axe (Oy), de rayon intérieur R_i et d’épaisseur e. On notera λ la conductivité thermique du matériau.
- Que devient cette expression si e << R_i. De quelle géométrie cette situation se rapproche-t-elle alors ?

Question ouverte

On s’intéresse au TEL de la neige (pourcentage de masse d’eau liquide dans la neige). Pour le mesurer on met en place le dispositif suivant (figure 1) :

- On introduit 80 g de méthanol à 0°C dans un bécher qui contenait déjà 25 g de neige à la température 0°C
- Ce bécher est placé dans un bain d’eau glacée à la température constante de 0°C
- On mesure la température au cours du temps dans le bécher

Les proportions de méthanol et de neige sont été choisies de telle sorte que la neige soit entièrement fondue à l’état final et que tout le méthanol reste liquide tout au long de l’expérience.

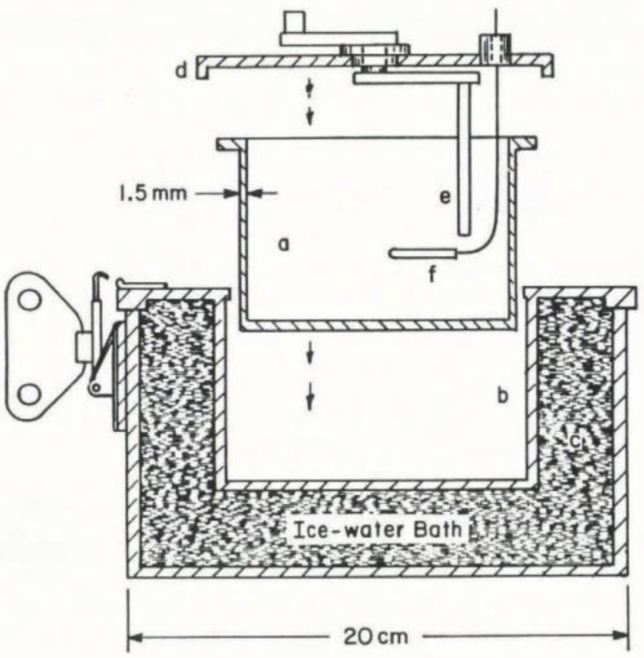
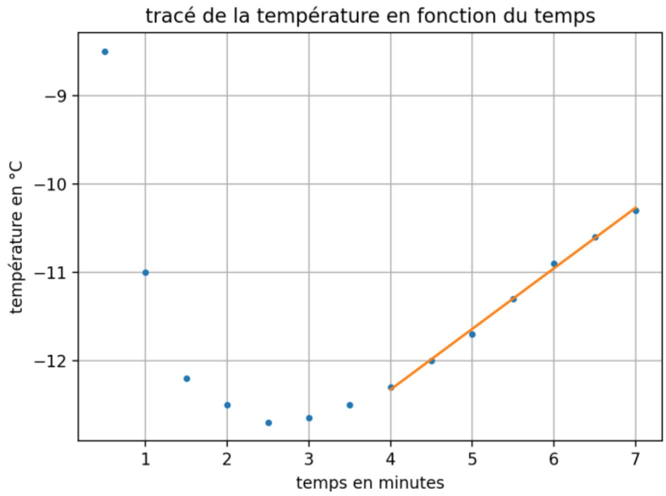


Fig. 1. Polycarbonate calorimeter for measurement of the liquid water content of snow: (a) reaction cup, (b) air space, (c) ice–water bath, (d) reaction-cup cover, (e) stirrer, (f) resistance temperature detector.

Déterminer le TEL de la neige utilisée dans cette expérience

Document 1 : évolution de la température à l'intérieur du bécher au cours du temps



Document 2 : on définit l'enthalpie de la réaction de mélange, notée ΔH_{mel}, associée à la réaction de mélange de deux corps purs :

A pur + B pur = (A+B)

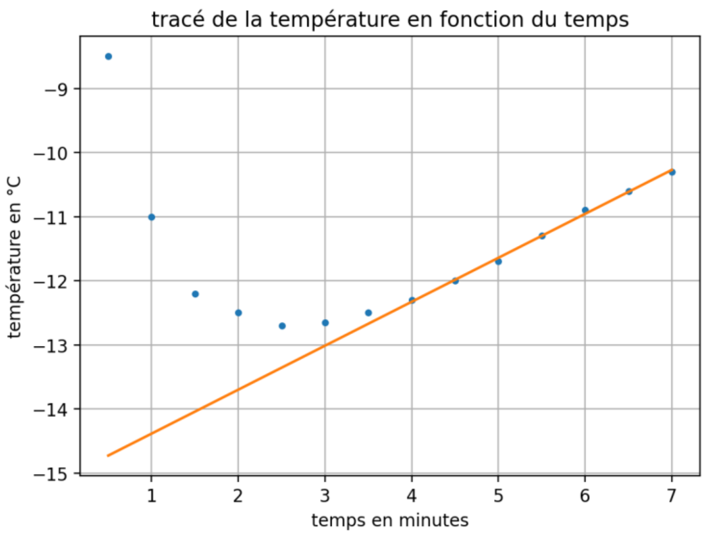
Document 3

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np


#entrée des N mesures :  t et T : 2 tableaux#
tps=np.array([0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4,4.5,5,5.5,6,6.5,7])
T=np.array([-8.5,-11,-12.2,-12.5,-12.7,-12.6,-12.4,-12.3,-12,-11.7,-11.3,-10.9,-10.6,-10.3])

tps2=np.array([4,4.5,5,5.5,6,6.5,7])
T2=np.array([-12.3,-12,-11.7,-11.3,-10.9,-10.6,-10.3])
a,b=np.polyfit(tps2,T2,1)

plt.plot(tps,T,'.')
plt.plot(tps,a*tps+b)
plt.title ('tracé de la température en fonction du temps')
plt.xlabel('temps en minutes')
plt.ylabel('température en °C')
plt.grid()
plt.show()
print('ordonnée à l origine en °C :',b)
```




```
>>> (executing file "pourcentage eau liquide.py")
ordonnée à l origine en °C : -15.071428571428566
```

Document 4

La même expérience (mêmes masses et même températures extérieures et initiales) est reconduite en remplaçant la neige par :

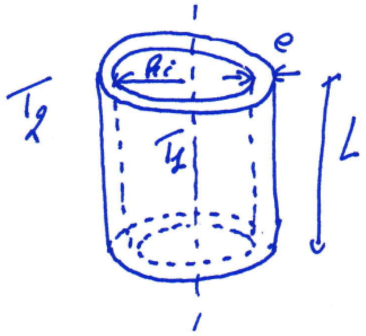
a. de l'eau liquide
b. de la neige avec 0% d'eau liquide

Les courbes de température en fonction du temps sont traitées de manière analogue par le script python du document 3. Les résultats sont les suivants :

a. ordonnée à l'origine : 7,7 °C
b. ordonnée à l'origine : -16,7°C

correction : pourcentage d'eau liquide dans la neige.

Question simple :



Loi de Fourier en géométrie cylindrique.

$$\phi_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L$$

$$\Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi_{th}}{2\pi\lambda L} \int_{r=R_i}^{r=R_i+e} \frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow T_2 - T_1 = -\frac{\phi_{th}}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R_i+e}{R_i}\right)$$

$$R_{th} \underset{\text{définitio}}{=} \frac{T_1 - T_2}{\phi_{th}} \Rightarrow R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R_i+e}{R_i}\right)$$

$$\ln\left(\frac{R_i+e}{R_i}\right) = \ln\left(1 + \frac{e}{R_i}\right) \underset{\substack{\text{DL ordre 1} \\ \text{si } e \ll R_i}}{\simeq} \frac{e}{R_i}$$

$$\Rightarrow \text{si } e \ll R_i \quad R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \times \frac{e}{R_i} = \frac{e}{\underbrace{2\pi L R_i}_{\text{surface du cylindre}} \times \lambda}$$

$\Rightarrow$ cette situation se rapproche de la géométrie axiale.

Question ouverte:

1) question posée oralement : résistance thermique du bécher

$$\text{Association } // : \quad \frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_{latérale}} + \frac{1}{R_{fond}}$$

$R_{latérale}$: exprimée question simple

$R_{fond} = \dfrac{e}{S_{fond} \times d}$: symétrie axiale

2) question posée oralement : établir et résoudre l'équation différentielle pour la 2ème partie de la courbe.

1er principe pour le système liquide {eau + méthanol} contenu dans le bécher :

$$C\,dT = \delta Q_{reçu} = \frac{T_{ext} - T}{R_{tot}} \cdot dt \qquad (T_{ext} = 0°C)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{C \cdot R_{tot}} T = \frac{T_{ext}}{R_{tot} C}$$

$$\Rightarrow T(t) = Ae^{-t/\tau} + T_{ext} \qquad \text{avec } \tau = R_{tot} C.$$

$\boxed{CI}$ $T(t=0) = T_0 \Rightarrow T(t) = (T_0 - T_{ext})e^{-t/\tau} + T_{ext}$

si $t \ll \tau$: $T(t) = (T_0 - T_{ext})\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + T_{ext} = T_0 + \frac{T_0 - T_{ext}}{\tau} t$

$\Rightarrow$ régression linéaire proposée dans le doc 3.

T_0 (ordonnée à l'origine) représente la température qui serait atteinte par le système si il était parfaitement calorifugé.

Expression de la "température initiale" T_0 pour les 3 expériences.

Exp 1 : { méthanol + neige avec un pourcentage x d'eau liquide. }

Notations : m : masse de la neige

$T_{ref} = 0°C$: température initiale de la neige, du méthanol et l'extérieure

C : capacité thermique.

T_{01} : température finale

$\Delta H = 0 \Rightarrow C(T_{01} - T_{ref}) + m(1-x)\ell_{fus} + \Delta H_{mel} = 0$ (1)

Exp 2 : { méthanol + neige avec 0% d'eau liquide }

$\Delta H = 0 \Rightarrow C(T_{02} - T_{ref}) + m\,\ell_{fus} + \Delta H_{mel} = 0$ (2)

Exp 3 : { méthanol + eau liquide }

$\Delta H = 0 \Rightarrow C(T_{03} - T_{ref}) + \Delta H_{mel} = 0$ (3)

$$\begin{cases} (1) - (3) \Rightarrow C(T_{01} - T_{03}) + m(1-x)\ell_{fus} = 0 \\ (2) - (3) \Rightarrow C(T_{02} - T_{03}) + m\,\ell_{fus} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(T_{01} - T_{03}) - (1-x)C(T_{02} - T_{03}) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{T_{01} - T_{03}}{T_{02} - T_{03}} \Rightarrow x = \frac{T_{02} - T_{01}}{T_{02} - T_{03}}$$

AN : $x = \dfrac{-16{,}7 - (-15{,}1)}{-16{,}7 - 7{,}7}$ $\quad x = 0{,}066 = 6{,}6\,\%$