Poêle

Question simple :
Une plaque d'une surface S, d’épaisseur négligeable et de conductivité thermique λ reçoit une puissance P par sa face intérieure et évacue de l'énergie par conducto-convection par sa face supérieure. Établir l'expression de la température dans la plaque au cours du temps.

Question ouverte :
Une poêle est chauffée par le bas à l’aide d’un brûleur à gaz apportant une puissance P. Elle évacue la chaleur par sa face supérieure, par conducto-convection. Enfin, sa poignée est en métal et on considère qu’il est impossible de la saisir si sa température est supérieure à 40 °C.

- Déterminer la température de surface de la plaque lorsque le régime stationnaire est atteint.
- Déterminer la longueur minimale de la poignée d'une crêpière d'un diamètre de 32 cm chauffée par le brûleur à gaz.

Données
- Coefficient conducto-convectif avec l’air : $h = 10\ W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$
- Capacité thermique massique de l’eau liquide : $c = 4{,}18\ J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$
- Conductivité thermique du métal : $\lambda = 100\ W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$

Question posée par l’examinateur
En supposant que la poêle contient 1 L d’eau qui atteint l’ébullition en 10 minutes, estimer la puissance P du brûleur à gaz.

Poêle CORRECTION

Question simple

Système : {la poêle de masse m}

On peut assimiler la transformation à une transformation isobare car l'équilibre des pressions est réalisé à chaque instant. Le Premier Principe pour une transformation isobare donne :

$$dH = \delta Q$$
$$mcdT = Pdt - \phi_{cc}dt$$
$$mcdT = P - hS(T - T_{ext})$$
$$\frac{dT}{dt} + \frac{hS}{mc}T = \frac{P}{mc} + \frac{hS}{mc}T_{ext}$$

On pose le temps caractéristique $\tau = \frac{mc}{hS}$:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{P}{\tau hS} + \frac{T_{ext}}{\tau}$$

Solution :

$$T(t) = Aexp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{P}{hS} + T_{ext}$$

Condition initiale :

A t = 0, $T(t = 0) = T_{ext}$

$$\boldsymbol{T(t) = \frac{P}{hS}(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)) + T_{ext}}$$

Question ouverte

Détermination de la puissance du brûleur à gaz $\boldsymbol{P}$

On peut rependre le résultat de la question simple si on suppose que le système est {la masse d'eau de 1 L} et que la poêle lui transmet intégralement la puissance P.

$$T(t) = \frac{P}{hS}(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)) + T_{ext}$$

Il vient :

$$P = hS\frac{T(t) - T_{ext}}{1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

AN :

L'eau bout en 10 minutes.

$$\tau = \frac{mc}{hS} = \frac{1000 \times 4{,}19}{10 \times 3{,}14 \times 0{,}16^2} = 5600\ s$$

$$P = 10 \times 3{,}14 \times 0{,}16^2\frac{373 - 298}{1 - exp\left(-\frac{600}{5600}\right)} = \boldsymbol{593\ W}$$

Cet ordre de grandeur semble convenable (en comparaison, une plaque électrique ou à induction avec 4 brûleurs fournit entre 1000 et 3000 W).

Détermination de la température de la poêle T_p en régime stationnaire :
On peut rependre le résultat de la question simple, on suppose que le système est {la poêle}.

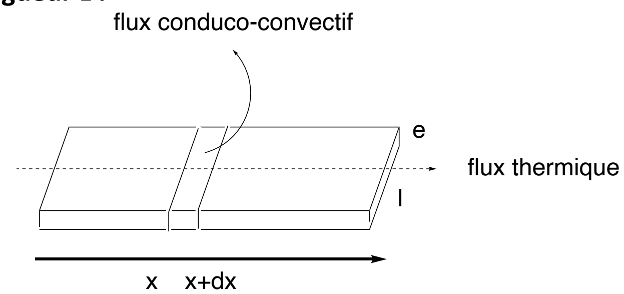
$$T(t) = \frac{P}{hS}(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)) + T_{ext}$$

Le régime stationnaire est atteint au bout de 5 τ :
AN :

$$T(5\,\tau) = \frac{593}{10 \times 3{,}14 \times 0{,}16^2}\left(1 - exp(-5)\right) + 298 = \mathbf{1030\ K}$$

Soit 757 °C, ce qui est quand même beaucoup ! Le coefficient conducto-convectif est sous-estimé ici, en réalité il y a beaucoup de convection, surtout s'il y a une hotte aspirante.

Détermination de la longueur L :



La poignée de la poêle est d'épaisseur e et de largeur ℓ. Elle est traversée par un flux thermique ϕ de gauche à droite (la poêle chaude est à gauche sur le schéma). Le flux conducto-convectif ϕ_{cc} évacue la chaleur par les faces latérales.

Soit une tranche de poignée entre x et $x + dx$. L'évolution est monobare quasi-statique (ou isobare car il y a toujours équilibre avec l'extérieur) :

$$dH = \delta Q(x) - \delta Q(x + dx) + \delta Q_{perdu}$$

Attention δQ_{perdu} est < 0 et $\delta Q_{perdu} = -\phi_{cc}dt$ avec $\phi_{cc} > 0$

En régime stationnaire : $H(t + dt) = H(t)$ donc $dH = 0$.

$$0 = \phi(x)dt - \phi(x + dx)dt - \phi_{cc}dt$$
$$0 = \phi(x) - \phi(x + dx) - \phi_{cc}$$

Attention : la surface d'échange avec l'air est $2\ell dx$:

$$0 = -d\phi - 2h\ell dx(T - T_{ext})$$
$$\frac{d\phi}{dx} = -2h\ell(T - T_{ext}) \quad (1)$$

D'après la loi de Fourrier : (attention la surface traversée par le flux thermique est $S = \ell e$)

$$\phi = -\lambda\ell e\frac{dT}{dx} \text{ donc } \frac{d\phi}{dx} = -\lambda\ell e\frac{d^2T}{dx^2} \quad (2)$$

En égalisant (1) et (2) : $-\lambda\ell e\frac{d^2T}{dx^2} = -h\ell(T - T_{ext})$, il vient :

$$\boldsymbol{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{e\lambda}T(x) = -\frac{2h}{e\lambda}T_{ext}}$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{e\lambda}{2h}}$ une longueur caractéristique.
La solution est la somme de la solution homogène et d'une solution particulière :

$$T(x) = Ae^{x/\delta} + Be^{-x/\delta} + T_a$$

Pour x qui tend vers l'infini, $T(x)$ diverge donc $A = 0$ (pas de sens physique sinon !).
Pour $x = 0,\ T = T_p$

Donc $\boldsymbol{T(x) = (T_p - T_{ext})e^{-\delta/x} + T_{ext}}$
On cherche la longueur L telle que $T_L = 313\ K$: $\boldsymbol{L = \delta \cdot \ln\left(\frac{T_p - T_{ext}}{T_L - T_{ext}}\right) = \sqrt{\frac{\lambda e}{2h}} \cdot \ln\left(\frac{T_p - T_{ext}}{T_L - T_{ext}}\right)}$

AN :
En supposant une épaisseur e = 5 mm

$$L = \sqrt{\frac{100\ \times 0{,}005}{2 \times 10}} \cdot \ln\left(\frac{1030 - 298}{313 - 298}\right) = \mathbf{0{,}97}\ \boldsymbol{m}$$

On trouve environ 1 m, c'est un ordre de grandeur un peu élevé mais pas délirant non plus compte tenu de la simplicité du modèle.