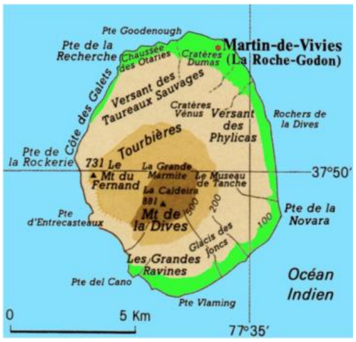
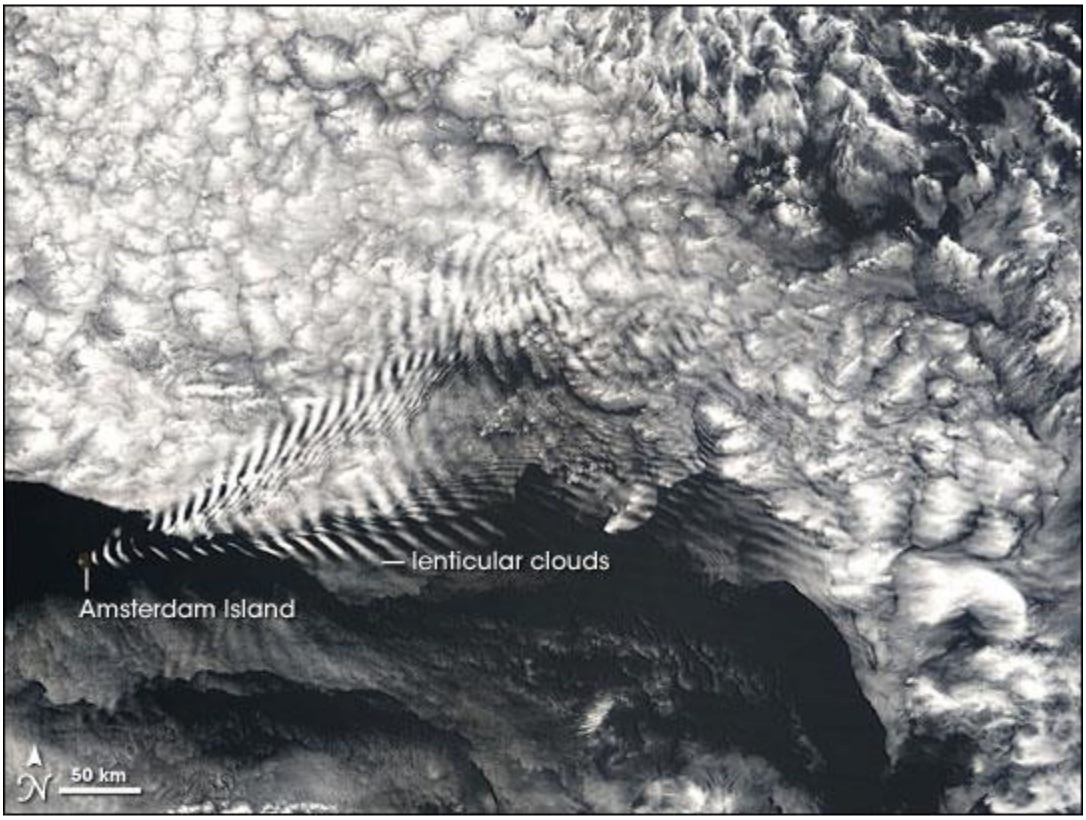
L’île Amsterdam

Amsterdam, située dans l’océan Indien méridional par 37°50′ S et 77°35′ E est une des îles les plus isolées au monde. Elle est située à plus de 3 000 km de tout continent, à mi-chemin entre l’Afrique du Sud et l’Australie. Son point culminant est le *Mont de la Dives* (881 m)



A la mi décémbre 2005, une photo de nuages orographiques formés au-dessus de cette ile a été capturée. Il s’agit de nuages formés par le soulèvement dû au relief. En aval de l'obstacle, il peut se former une onde de gravité atmosphérique. Si l'environnement est stable, la masse d'air redescendra du côté aval de l'obstacle et entrera en oscillation autour d'une hauteur environ égale au sommet de celui-ci.



Question simple

- Etablir la relation ci-dessous dans le cas d’une atmosphère statique :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho\, g$$

où P est la pression, r la masse volumique et g l’accélération de la pesanteur

- Dans le cas du modèle du gaz parfait, déduire l'équation différentielle vérifiée par la masse volumique $\rho(z)$ pour une atmosphère isotherme.
- En déduire l'évolution de la masse volumique ρ avec l'altitude.

<u>Question ouverte.</u>

A l'aide des documents fournis, déterminer la vitesse du vent en amont de l'île.

- ✓ Mettre en place un modèle mécanique sur un système fermé, isochore.
- ✓ On pourra utiliser le résultat de la question simple
- ✓ Donnée sur la propagation des incertitudes

<u>Correction</u> : île Amsterdam

Question simple

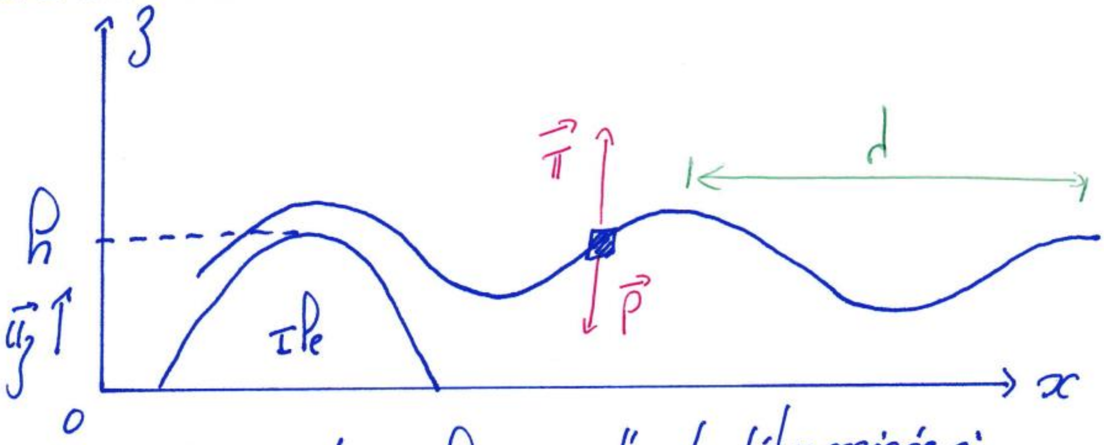
- démo $\frac{dP}{dz} = -\rho g$: voir cours (axe Oz ↑)

- $\rho = \frac{m}{V} = \frac{n \cdot M}{V} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{modèle GP :} \\ PV = nRT}}{=} \frac{PM}{RT} \Rightarrow P = \rho \frac{RT}{M}$

$\Rightarrow \frac{d}{dz}\left(\rho \frac{RT}{M}\right) = -\rho g \underset{\substack{\uparrow \\ \text{atmosphère} \\ \text{isotherme}}}{\Rightarrow} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{Mg}{RT}\rho$

- Résolut° : $\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT} z\right)$

Question ouverte



$c = \frac{d}{T}$

c : vitesse du vent

d : longueur d'onde déterminée à partir de la photo

T : période des oscillations exprimée à partir d'un modèle mécanique.

• déterminat° de λ

on mesure 2 longueurs d'onde sur 17 km

$\Rightarrow \lambda = 8,5$ km.

• détermination de T

système : { masse d'air = système fermé en évolution isochore }.

V : m

- Dans l'atmosphère immobile la masse m est à l'équilibre à l'altitude $z = h$ $\Rightarrow \|\vec{P}\| = \|\vec{\Pi}\|$

$$\Rightarrow mg = \rho(h) V g \Rightarrow m = \rho(h) V$$

- En présence de vent, oscillations verticales de cette masse autour de sa position initiale : $z = h + \varepsilon$

Forces : $\vec{P} = -mg\,\vec{u_z}$

$\vec{\Pi} = \rho(z) V g\,\vec{u_z}$

PFD : $m\ddot{z} = -mg + \rho(z)Vg \underset{m = \rho(h)V}{\Rightarrow} \ddot{z} = g\left(\dfrac{\rho(z)}{\rho(h)} - 1\right)$ (a)

Pour des oscillations proches de la position d'équilibre :

$$\rho(z) \underset{\substack{\text{DL ordre 1} \\ \text{autour de } z = h}}{=} \rho(h) + \left.\frac{d\rho}{dz}\right)_{z=h} \varepsilon$$

(a) $\Rightarrow \ddot{z} = \ddot{\varepsilon} = g \dfrac{1}{\rho(h)} \left.\dfrac{d\rho}{dz}\right)_{z=h} \varepsilon$

or d'après la question simple, dans le cas du modèle du gaz parfait pour une atmosphère isotherme :

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{Mg}{RT}\rho \Rightarrow \left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{z=h} = -\frac{Mg}{RT}\rho(h)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varepsilon} = -\frac{Mg^2}{RT}\varepsilon \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \underbrace{\frac{Mg^2}{RT}}_{\omega_0^2}\varepsilon = 0$$

ω_0 : pulsation propre des oscillations

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{RT}{Mg^2}}$$

AN : $T = 298\,K$; $M = 29\,g.mol^{-1}$ $\quad T = 187\,s$

or $c = \frac{d}{T}$ $\quad$ AN : $c = \frac{8,5\cdot10^3}{187} = 45,5\,m\cdot s^{-1} = 164\,km\cdot h^{-1}$

Rq : sous principale d'incertitude : sur la mesure de d.

$\ell_1 = 7\,mm$ pour la mesure de 2 périodes

$\ell_2 = 20\,mm$ pour la mesure de l'étalon $e = 50\,km$.

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2}\frac{\ell_1}{\ell_2}\times e \Rightarrow c = \frac{1}{2}\frac{\ell_1}{\ell_2}\times\frac{e}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{u(c)}{c} = \sqrt{\left(\frac{u(\ell_1)}{\ell_1}\right)^2 + \left(\frac{u(\ell_2)}{\ell_2}\right)^2}$$ avec $u(\ell) = \frac{1}{\sqrt{6}}\,mm$ (lecture double)

AN : $u(c) = 2,8\,m\cdot s^{-1} = 10\,km\cdot h^{-1}$