Tir d’une pénalité au rugby

Question simple.

Le joueur de rugby Thomas Ramos tire une pénalité. Les frottements de l’air seront négligés dans cette question. Le ballon se trouve à 35 m des poteaux. La barre horizontale est placée à une hauteur de 3m. La vitesse initiale du ballon est de 32 m.s^{-1} et le vecteur vitesse initiale forme un angle de 28° avec l’horizontale.

Le tir est-il réussi ?

Question ouverte.

On prend en compte à présent les frottements de l’air. Le tir est-il réussi ?

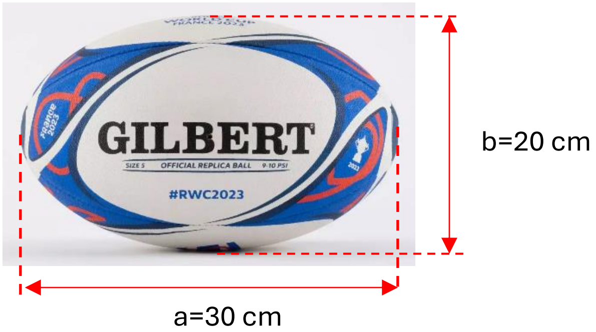
<u>Donnée</u> : La force de frottement fluide de l’air est modélisée par $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ si le nombre de Reynolds R_e associé à l’écoulement relatif de l’air est inférieur à 1.

Peut-on utiliser cette modélisation ?

A l’aide des documents fournis commenter alors le rôle du script Python fourni, en particulier les lignes 39 à 41.

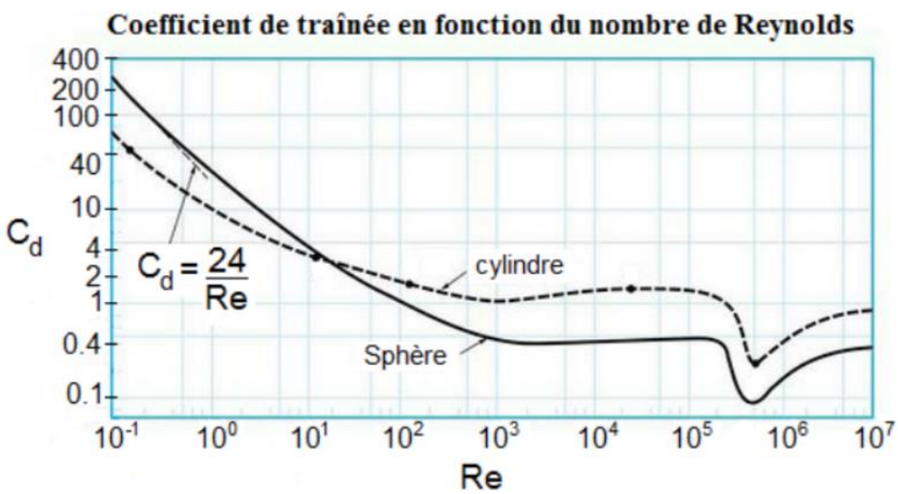
<u>Document 1 : caractéristiques d’un ballon de rugby.</u>

Masse = 460 g



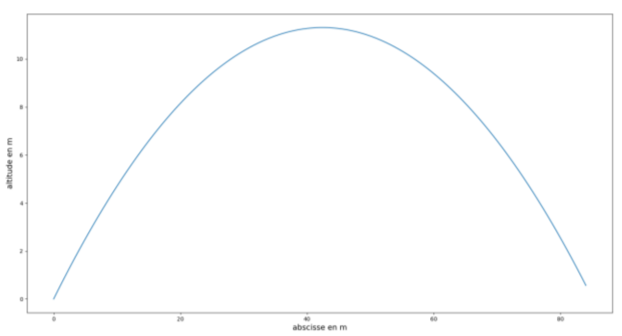
<u>Document 2 : coefficient de trainée C_D.</u>

$$C_D = \frac{\|\overrightarrow{F_{tr}}\|}{\frac{1}{2}\rho.S.v^2}$$ où $\|\overrightarrow{F_{tr}}\|$ est la norme de la force de trainée



```
# TIR PENALITE.py

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
from math import pi


#Données numériques
g=9.8        #accélération de la pesanteur en m/s2
m=0.460      #masse du ballon en kg
D=0.25        #diamètre de la section centrale du ballon
rho=1.17     #masse volumique de l'air en kg/m^3
eta=2e-5     #viscosité dynamique de l'air en Pl
v0= 32       #vitesse initiale du ballon en m/s
alpha=28     #angle d'inclinaison du tir avec l'horizontale en degré

#Calcul de la surface frontale du ballon
S = pi * D**2/4

#Définition d'une fonction permettant de calculer le coefficient de trainée Cx
def C(Re) :
    if Re<=.1 :
        Cx = 24/Re
    elif .1<Re<=1000 :
        Cx = 24/Re*(1+.14*Re**.7)
    elif 1000<Re<=3e5 :
        Cx = .445
    else :
        Cx = .19 - 8e4/Re
    return Cx

t0=0  # instant initial(s)
tf=3  #  durée (s)
N=1000  # nombre de points
T=np.linspace(t0,tf,N)

def f(U,t): #définition de la fonction f associée à l'équation différentielle à résoudre mise sous la forme dU/dt=f(U)
    (x,xpoint,z,zpoint)=U   #Définition des composantes du vecteur U
    Re=rho*np.sqrt(xpoint**2+zpoint**2)*D / eta
    Fx=-.5 * C(Re) * S * rho *np.sqrt(xpoint**2+zpoint**2)*xpoint
    Fz=-.5 * C(Re) * S * rho *np.sqrt(xpoint**2+zpoint**2)*zpoint
    return (xpoint,Fx/m,zpoint,-g+Fz/m)

SOLUTION=odeint(f,(0,v0*np.cos(alpha*pi/180),0,v0*np.sin(alpha*pi/180)),T)
X=SOLUTION[:,0]
Z=SOLUTION[:,2]

#Tracé de la courbe de l'altitude du ballon en fonction de l'absciss
plt.plot(X,Z)
plt.xlabel('abscisse en m', fontsize=14)
plt.ylabel('altitude en m', fontsize=14)

plt.show()
```

Graphe renvoyé par le script :



Document 3 : fonction ODEINT

Odeint (f, Y_0, t) résout une équation différentielle mise sous la forme $\frac{dY}{dt} = f(Y,t)$ (ou un système d'équations différentielles, Y est alors un vecteur à plusieurs composantes).

Y_0 est la condition initiale (ou les conditions initiales qui sont alors les composantes du vecteur Y_0) et t un tableau contenant les valeurs du temps choisies pour la résolution.

Les solutions sont renvoyées sous forme d'un tableau, rangées dans le même ordre que les composantes du vecteur Y.

Corrigé : Tir d'une pénalité au rugby

<u>Question simple.</u>

La projection du PFD appliqué au ballon dans le référentiel terrestre Galiléen donne :

$$\ddot{x} = 0 \implies \dot{x} = v_0 cos\alpha \implies x = (v_0 cos\alpha)t$$

$$\ddot{z} = -g \implies \dot{z} = -gt + v_0 sin\alpha \implies z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 sin\alpha)t$$ (axe Oz vers le haut)

$z = -\frac{g}{2v_0 \cos^2 \alpha}x^2 + (tan\alpha)x$ **A.N : altitude z = 11 m > 3 m, à l'abscisse x = 35 m des poteaux => tir réussi.**

<u>Question supplémentaire :</u> Calculer la portée. Z = 0 => $z = -\frac{g}{2v_0 \cos^2 \alpha}x^2 + (tan\alpha)x$ => x = 86,5 m.

<u>Question ouverte.</u>

Hypothèse : frottements modélisés par $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$?

Calcul du nombre de Reynolds à l'état initial : $R_e = v_0.\frac{L_\perp}{\left(\frac{\eta_{air}}{\rho_{air}}\right)}$

Calcul de ρ_{air} à 298 K par le modèle du GP : $\rho_{air} = \frac{P_{atm}M_{air}}{RT} = 1{,}17\ kg.m^{-3}$

Ordre de grandeur *(demandé !)* de la viscosité dynamique de l'air : 2.10^{-5} Pl => **R_e = $5{,}6.10^5$ >>> 1** => modélisation non valable.

Script Python :

Permet la prise en compte des frottement de l'air en considérant la force de trainée.

<u>Question supplémentaire :</u> expression de la force de trainée sous forme vectorielle : $\overrightarrow{F_{tr}} = -\frac{1}{2}C_d.\rho.S.\|\vec{v}\|.\vec{v}$.

Le PFD devient : $m\vec{g} + \overrightarrow{F_{tr}} = m\vec{a}$. Les lignes 39 et 40 correspondent à la projection du PFD sur Ox et Oz en utilisant dans la formule de la force de trainée : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ et une modélisation du coefficient de trainée en fonction du Nombre de Reynolds conformément à la courbe fournie, grâce à la fonction C(R_e).

L'intégration est réalisée à l'aide de Odeint en mettant l'équation différentielle sous la forme donnée dans le document 3 :

$$Y(x,\dot{x},z,\dot{z}) \overset{f}{\Rightarrow} \frac{dY}{dt}\left(\dot{x}, \ddot{x} = \frac{F_{(tr)_x}}{m}, \dot{z}, \ddot{z} = -g + \frac{F_{(tr)_z}}{m}\right)$$

Le graphe renvoyé montre que z > 3m pour x = 35 m => **Tir réussi.**

<u>Question supplémentaire :</u> légitimité de l'hypothèse consistant à négliger la poussée d'Archimède .

Calcul de l'ordre de grandeur : $\Pi = \rho_{air}.V_{ballon}g = \rho_{air}(\frac{4}{3}\pi a.b^2)g$ *= 0,57 N << mg=4,56 N*