Loi de Murray

Question simple.

Démontrer l'expression du profil de vitesse et du débit volumique pour un écoulement de Poiseuille.

Question ouverte.

- ✓ A partir des documents fournis préciser la loi expérimentale de Murray qui relie dans le système vasculaire humain, le rayon d'un vaisseau et le nombre de vaisseaux sanguins semblables.

- ✓ Retrouver cette loi par un calcul basé sur un modèle associé aux hypothèses suivantes :

  - 1) le système vasculaire est supposé être composé de deux types de vaisseaux : Na artères de longueur L_a et de rayon R_a et N_c capillaires de longueur L_c et de rayon R_c. (figure 1). On supposera que chaque artère irrigue le même nombre de capillaires.

  - 2) Le corps optimise l'utilisation des tissus, c'est-à-dire qu'il minimise le volume V_0 de tissus utilisés dans la construction des parois du système vasculaire, dans lequel l'épaisseur e de chaque vaisseau est proportionnelle à son rayon moyen a : $\boldsymbol{e = \alpha . a}$ avec $\alpha \ll 1$.

  - 3) Le corps se construit en minimisant aussi la résistance hydraulique des vaisseaux.

Document 1.

La **figure 1** représente le système vasculaire humain. La cavité droite du cœur envoie le sang appauvri en dioxygène dans les poumons à travers l'artère pulmonaire. Les poumons enrichissent le sang en dioxygène. Le sang enrichi en dioxygène retourne dans le côté gauche du cœur et irrigue l'ensemble du corps puis revient au côté droit par la veine cave. Le système vasculaire issu de l'aorte se divise en artères, puis artérioles et capillaires. Le **tableau 1** page suivante donne, chez l'homme, le diamètre des différents types de vaisseaux et leur nombre.

Le cœur humain pèse environ 0,3 kilogramme et bat environ une fois toutes les secondes lorsqu'il est au repos. À chaque battement, son côté gauche injecte 80 cm^3 de sang par l'aorte à la pression de 16 kPa. La puissance mécanique massique totale du cœur est de 5 $W.kg^{-1}$. Pour une durée de vie d'environ 80 années, cela en fait une source de travail remarquable.

Le biologiste anglais C. Murray a étudié la relation qui existe entre le diamètre d'un vaisseau et le nombre de vaisseaux semblables. La **figure 2** où sont portés en échelle logarithmique les nombres de vaisseaux N en fonction de leur rayon a met en évidence cette relation.

Document 2

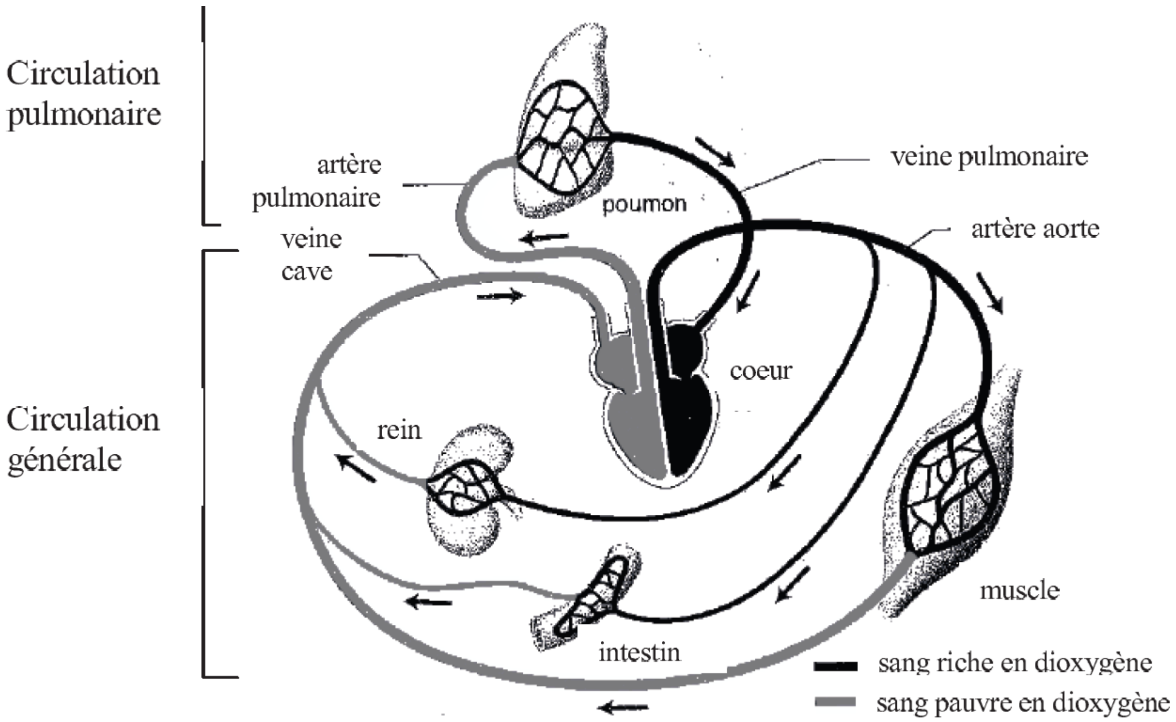

Figure 1 – Le système vasculaire humain
Le côté gauche du cœur est représenté à droite et le côté droit à gauche.

Document 3

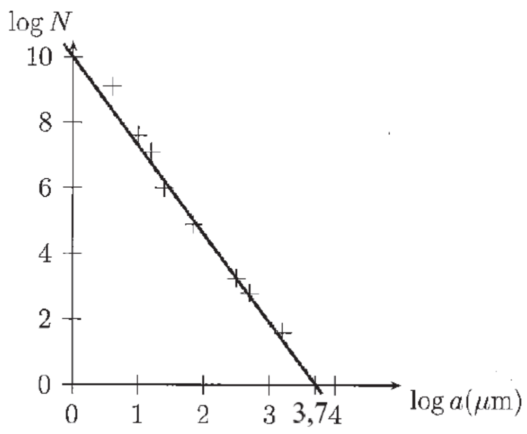

Figure 2 – Nombre de vaisseaux N en fonction de leur rayon a

Document 4

Vaisseau	Diamètre $2a$ (mm)	Nombre N
Artère aorte	10^1	1
Grandes artères	3	4.10^1
Branches principales	1	6.10^2
Branches secondaires	6.10^{-1}	2.10^3
Branches tertiaires	10^{-1}	8.10^4
Artères terminales	5.10^{-2}	10^6
Branches terminales	3.10^{-2}	10^7
Artérioles	2.10^{-2}	4.10^7
Capillaires	8.10^{-3}	10^9

Tableau 1 – Diamètres et nombres des différents types de vaisseaux chez l'homme

Corrigé : Loi de Murray

<u>Loi expérimentale de Murray :</u> De la figure 2, on peut extraire le coefficient directeur de la droite log(N) en fonction de log(a) : $\frac{10-0}{0-3{,}74} = -2{,}674$ et l'ordonnée à l'origine = 10 d'où l'équation de la droite :

$\log(N) = -2{,}674.\log(a) + 10$ soit $\log(N) + 2{,}674.\log(a) = 10 \Leftrightarrow \log(N.a^{2{,}674}) = 10 \Leftrightarrow N.a^{2{,}674} = 10^{10}$ soit :

$\boldsymbol{N = 10^{10}.a^{-2{,}674} \Leftrightarrow N.a^{2{,}674} = cte}$ **(loi expérimentale)**

<u>Etude du modèle :</u>

Hyp 1 => Volume V_0 des vaisseaux : $V_0 = N_a.V_a + n_c.V_c \cong N_a.2\pi R_a.L_a.e + N_c.2\pi R_c.L_c.e \quad car\ e \ll R_a et\ R_c$.

e proportionnelle au rayon=> :$V_0 \cong N_a.2\pi R_a.L_a.\alpha.R_a + N_c.2\pi R_c.L_c.\alpha.R_c = \quad 2\pi\alpha(N_a.L_a.R_a^2 + N_c.L_c.R_c^2)$

V_0 fixé pour réaliser l'ensemble artères + capillaires :

=> $dV_0 \ = \ 0 = 2\pi\alpha(N_a.L_a.2R_a.dR_a + N_c.L_c.2R_c.dR_c)$ d'où on déduit : $\boldsymbol{\frac{dR_c}{dR_a} = -\frac{N_a.L_a.R_a}{N_c.L_c.R_c}}$ **(1)**.

<u>Calcul de la résistance hydraulique totale</u> :

La figure 1 permet de voir que chaque artère (ou veine) est en série avec un ensemble de capillaires connectés en parallèle. D'après l'hypothèse 1) chaque artère est en série avec à N_c/N_a capillaires en parallèle.

Donc : $R_{h(1\ artère+capillaires)} = Rh_a + \frac{Rh_c}{\left(\frac{N_c}{N_a}\right)}$. L'ensemble du système circulatoire est donc constitué de N_a associations (artère + capillaires) en parallèle, d'où :

$\boldsymbol{R_{h(tot)}} = \frac{1}{N_a}\left(Rh_a + \frac{Rh_c}{\left(\frac{N_c}{N_a}\right)}\right) = \frac{Rh_a}{N_a} + \frac{Rh_c}{N_c} = \boldsymbol{\frac{8\eta L_a}{N_a\pi R_a^4} + \frac{8\eta L_c}{N_c\pi R_c^4}}$ (en supposant la loi de Poiseuille valable dans artères et capillaires).

Hyp 3 => Les valeurs de N_a et N_c conduisent à **$R_{h(tot)}$ minimale** ⬄ $dR_{h(tot)} = 0$ lorsque N_a et N_c varient :

$$dR_{h(tot)} = \frac{8\eta L_a}{N_a\pi}.\left(-\frac{4}{R_a^5}\right)dR_a + \frac{8\eta L_c}{N_c\pi}\left(-\frac{4}{R_c^5}\right)dR_c = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{dR_c}{dR_a} = -\frac{N_c.L_a.R_c^5}{N_a.L_c.R_a^5}} \quad \textbf{(2)}.$$

En identifiant (1) et (2) on obtient : $\frac{N_a.L_a.R_a}{N_c.L_c.R_c} = \frac{N_c.L_a.R_c^5}{N_a.L_c.R_a^5} \Leftrightarrow N_a^2.R_a^6 = N_c^2.R_c^6 \Leftrightarrow \boldsymbol{N_a.R_a^3 = N_c.R_c^3}$.

<u>Confontation modèle et expérience ; critiques.</u>

On trouve avec le modèle une relation du type $\boldsymbol{N_{vaisseau}.R_{vaisseau}^3 = cte}$ alors que la loi expérimentale est du type $\boldsymbol{N_{vaisseau}.R_{vaisseau}^{2{,}674} = cte}$ **=> Le nombre de vaisseaux sanguins réellement observés pour un rayon donné est plus important que celui prévu par le modèle.**

Défauts du modèle :

La loi de Poiseuille nécessite un écoulement permanent (or la circulation sanguine est un régime « pulsé » par le rythme cardiaque) et laminaire (pas vérifié dans les artères), d'un fluide newtonien (le sang s'en écarte) pour une symétrie cylindrique (les vaisseaux présentent des courbures et déformations par rapport à cette symétrie). Rôle de la pesanteur non pris en compte (=> pression motrice)

Les artères ne sont pas toutes identiques entre elles et n'ont pas la même longueur ; idem pour les capillaires (Hyp 1) et le coefficient α n'est pas identique pour artères et capillaires (Hyp. 2)