

Sky lanterns

Les lanternes volantes (*sky lanterns*) sont traditionnellement utilisées en Asie. Elles sont constituées d'une enveloppe de papier très fin et léger à la base duquel se trouve une ouverture. Au centre de cette ouverture se trouve un morceau de combustible solide (type bougie). L'ensemble peut s'élever à plusieurs dizaines de mètres pendant 5 minutes.



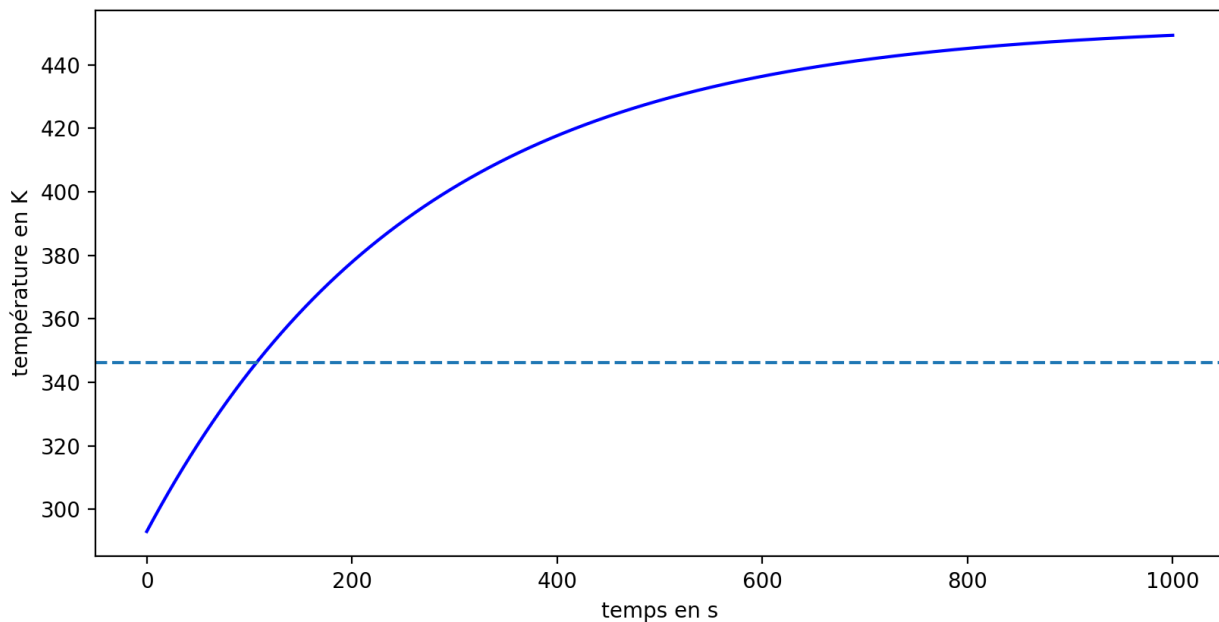
Données

- Masse totale de la lanterne : $m = 12 \text{ g}$
- Rayon de la lanterne dans un modèle sphérique : $a = 25 \text{ cm}$
- Masse molaire de l'air : $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$
- Coefficient adiabatique de l'air : $\gamma_{\text{air}} = C_p/C_v = 1,4$
- Puissance de la bougie servant à chauffer l'air : $P_{\text{bougie}} = 30 \text{ W}$
- Conductivité thermique du papier constitutif de la lanterne : $\lambda_{\text{papier}} = 0,12 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.
- Epaisseur du papier constitutif de la lanterne : $e = 0,5 \text{ mm}$
- Diffusivité thermique du papier : $D_{\text{th}} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

Question simple : quelle doit être la température minimale de l'air contenu dans la lanterne pour que celle-ci s'envole ?

Question ouverte : estimer le temps nécessaire pour que cette température soit atteinte. On introduira dans le modèle la résistance conducto-convective en prenant comme valeur numérique $R_{\text{th conv}} = 4 \text{ K.W}^{-1}$

Le code ci-dessous et le graphique associé pourront servir à la résolution de la question ouverte



```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 #saisie des données
5 Tair = 293 #en K
6 Pbougie = 40 #en W
7 Rth = 4 #en K.W-1
8 r=0.25 #rayon de la lanterne en m
9 T0 = 293 #en K
10 Tc = # à compléter : température de l'air au décollage de la lanterne
11 M = 0.029 #masse molaire de l'air en kg.mol-1
12 R = 8.314
13
14 #Calcul de la masse contenue dans la lanterne à Tc
15 m = 4/3*np.pi*r**3*10**5/(R*Tc)*M
16
17 # calcul de la capacité thermique de la masse m d'air
18 gamma = 1.4
19 Cp = gamma*m*R/(M*(gamma-1))
20
21 # paramètres de la méthode d'intégration
22 h=0.001 # en s
23 duree=1000 # en s
24
25 # initialisation des listes
26 Lt=[0] # liste des instants t
27 LTemp=[T0] # liste des températures successives
28
29 # boucle d'intégration
30 #résolution par la méthode d'Euler, à compléter
31
32 plt.figure()
33 plt.plot(Lt,LTemp,'b-')
34 plt.axhline(y=Tc,ls='--')
35 plt.xlabel('temps en s')
36 plt.ylabel('température en K')
37 plt.show()

```

Correction: sky lantern

• Température minimale et condition de décollage.

Modèle de la lanterne sphérique

{ Lanterne }

Bilan des forces: $\vec{P} = m \vec{g}$ $T \vec{g}$
 $\vec{\pi} = -m_{\text{air}} \vec{g} = -\rho_{\text{air}} V \vec{g}$
 $\vec{P}_{\text{air chaud}} = m_{\text{air chaud}} \vec{g} = \rho_{\text{air chaud}} V \vec{g}$
 $\vec{R}$: réaction du support.

A la limite du décollage, la réaction du support s'annule.

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{\pi} + \vec{P}_{\text{air chaud}} = \vec{0} \Rightarrow m + V(\rho_{\text{air chaud}} - \rho_{\text{air}}) = 0 \quad (1)$$

(1) Gaz parfait: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m \cdot T}{V} = \frac{P T}{R T}$

Au niveau du sol: $P = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$
 $T_{\text{air}} = 293 \text{ K}$

Soit T_c la température de l'air chaud dans la lanterne

$$(1) \Rightarrow m - \frac{P_0 T}{R T_{\text{air}}} V + \frac{P_0 T}{R T_c} V = 0$$

$$\Rightarrow T_c = \frac{\frac{P_0 T V}{R}}{-m + \frac{P_0 T V}{R T_{\text{air}}}} = \frac{1}{\frac{1}{T_{\text{air}}} - \frac{m R}{P_0 T V}}$$

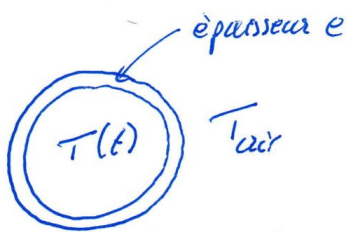
AN: $T_e = 346 \text{ K}$

Question ouverte

Soit m_{air} la masse d'air à chauffer de T_{air} à T_e

Premier principe appliqué à cette masse d'air (à pression constante)

$$dH = \delta Q \Rightarrow C_p dT = P_{h, \text{air}} d\epsilon + P_{\text{bougie}} d\epsilon$$



$$P_{h, \text{air}} = \frac{T_{\text{air}} - T(t)}{R_{h, \text{air}}}$$

$R_{h, \text{air}} = R_{h, \text{papier}} + R_{h, \text{conv}}$: résistance thermique totale.

• calcul de $R_{h, \text{papier}}$

symétrie sphérique: $\phi = - \int \frac{4\pi r^2}{dr} dT$

$$\Rightarrow \int_{T_{\text{ext}}}^{T_{\text{int}}} dT = - \frac{\phi}{4\pi d} \int_a^{a+e} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow T_{\text{ext}} - T_{\text{int}} = \frac{\phi}{4\pi d} \left(\frac{1}{a+e} - \frac{1}{a} \right)$$

$$R_{h, \text{papier}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{\phi} \Rightarrow R_{h, \text{papier}} = \frac{1}{4\pi d} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+e} \right)$$

$$\Rightarrow R_{h, \text{papier}} = \frac{e}{4\pi d a(a+e)} \quad \text{AN: } R_{h, \text{papier}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

$\Rightarrow R_{h, \text{papier}} \ll R_{h, \text{conv}} \Rightarrow$ on ne considère pas la suite que $R_{h, \text{conv}}$

$$(2) \Rightarrow C_p \frac{dT}{dt} = \frac{T_{air} - T}{R_{th, conv}} dt + P_{bougie} dt$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{C_p R_{th, conv}} T = \frac{T_{air}}{R_{th, conv} C_p} + \frac{P_{bougie}}{C_p}$$

$$\text{avec } C_p = m C_{p, m} \stackrel{\text{① GP}}{=} \frac{P_0 V}{R T_c} \times \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$\text{on pose } \tau = R_{th, conv} C_p$$

$$\text{solut}^o T(t) = A e^{-t/\tau} + T_{air} + R_{th, conv} P_{bougie}$$

$$\boxed{\text{CI}} \quad T(t=0) = T_{air} \Rightarrow A = - R_{th, conv} P_{bougie}$$

$$\Rightarrow T(t) = R_{th, conv} P_{bougie} (1 - e^{-t/\tau}) + T_{air}$$

le script Python permet de tracer T en fct^o du temps
on cherche t_1 : $T(t=t_1) = T_c \Rightarrow \underline{\underline{t_1 = 105 \text{ s}}}$

Rq: script complété pour méthode d'Euler:

```

33 # boucle d'intégration
34 nbpts=duree/h
35 i=1
36 while i <= nbpts :
37     Temp = LTemp[-1]
38     Lt.append(i*h)
39     LTemp.append(Temp + h*(-Temp/(Rth*Cp)+Pbougie/Cp+Tair/(Rth*Cp)))
40     i=i+1

```

