

Question simple

Etablir l'expression de la loi de Darcy donnant le débit volumique d'un liquide qui s'écoule verticalement à travers un milieu poreux de porosité ϕ et de perméabilité K .

Etablir la relation entre la perméabilité, la porosité et le rayon des pores.

Question ouverte : Filtration de l'eau avec une carafe au charbon actif



Calculez la durée Δt nécessaire pour filtrer l'eau contenue dans cette carafe munie d'un filtre au charbon actif. Pour cela vous serez amené à utiliser le script en langage Python fourni qui devra être complété pour effectuer le calcul de la durée de filtration (lignes 24, 26 et 27) et pour afficher le résultat Δt avec son unité (ligne 31).

Proposez une méthode expérimentale pour déterminer la porosité du charbon actif. En utilisant la valeur fournie estimez le rayon des pores du filtre au charbon actif.

Données :

-Loi donnant la section $S(z)$ de l'entonnoir en fonction de l'altitude z , en posant $z = 0$ sur la partie supérieure de la cartouche : $S(z) = S_0 (1 + z/h_1)$ (h_1 : hauteur de l'entonnoir)

- Perméabilité du charbon actif: $K = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$

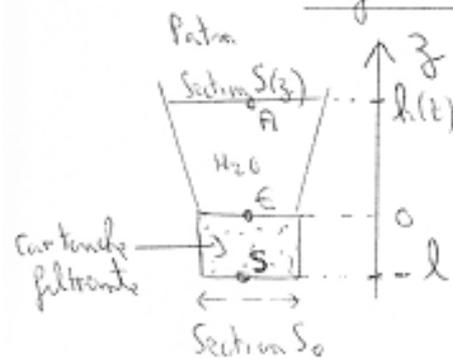
- Porosité du charbon actif : 0,8

- Viscosité dynamique de l'eau = $10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

DOCUMENT : script Python

```
01| ##CARAFE FILTRANTE
02|
03| ## IMPORT DES BIBLIOTHÈQUES
04|
05| import matplotlib.pyplot as plt
06| import numpy as np
07|
08| ## DEFINITIONS DES PARAMETRES
09|
10| Rho=1000 # masse volumique de l'eau (en kg.m-3)
11| g=9.81 # accélération de la pesanteur (en m.s-2)
12| Eta=1e-3 #viscosité dynamique de l'eau (en Pl)
13| K=5e-10 #perméabilité du charbon actif
14| l=0.04 #hauteur de la cartouche filtrante (en m)
15| h1=0.2 #hauteur initiale d'eau à filtrer (en m)
16|
17| ## INITIALISATION DES LISTES DES INSTANTS ET DES HAUTEURS D'EAU A
FILTRER
18| LT=[0]
19| Lz=[h1]
20|
21| ## BOUCLE D'INTEGRATION
22| h=0.01
23| i=1
24| while '''à compléter'''
25|     z=Lz[-1]
26|     LT.append('''à compléter''')
27|     '''à compléter'''
28|     i=i+1
29|
30| ##AFFICHAGE DU RESULTAT
31| '''à compléter'''
```

Argumentation - Echange : Filtration de l'eau



Débit volumique de l'eau à la sortie de la cartouche donné par la loi de Darcy :

$$\frac{Dv}{S_0} = k \frac{\Delta P_m}{\eta l} \quad \text{avec } P_m = P + \rho g z \quad (\rho \text{ matrice})$$

$$\Delta P_m = P_{mE} - P_{mS} = (P_E - P_S) + \rho g (z_E - z_S)$$

$$\Delta P_m = \rho g (z+l) \Rightarrow Dv = k S_0 \frac{\rho g (z+l)}{\eta l} \quad (1)$$

Débit volumique de l'eau dans l'entonnnoir : $Dv = -S(z) \frac{dz}{dt} = -S_0 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \frac{dz}{dt}$ (2)

Conservation du débit volumique (Hyp H_2O incompressible et écoulement en régime permanent) $\Rightarrow (1) \equiv (2) \Rightarrow -S_0 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \frac{dz}{dt} = k S_0 \frac{\rho g (z+l)}{\eta l}$

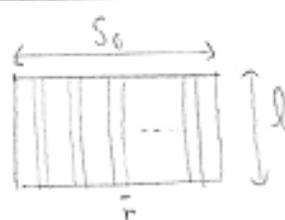
$$\Rightarrow \frac{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz}{(z+l)} = -\frac{k \rho g}{\eta l} dt \quad \Rightarrow \int_{z=R_1}^{z=0} \frac{dz}{z+l} = -\frac{k \rho g R_1}{\eta l} \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \left[z + (R_1 - l) \ln(z+l) \right]_{R_1}^0 = -\frac{k \rho g R_1}{\eta l} t$$

$$\Rightarrow (R_1 - l) [\ln l - \ln(R_1 + l)] - R_1 = -\frac{k \rho g R_1}{\eta l} t \Rightarrow t = \frac{\eta l}{k \rho g} \left[1 - \left(1 - \frac{l}{R_1}\right) \ln \frac{l}{R_1 + l} \right]$$

A.N.: $t = \frac{10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-10} \cdot 10^3 \cdot 10^4} \left[1 - \left(1 - \frac{4 \cdot 10^{-2}}{0,2}\right) \ln \frac{4 \cdot 10^{-2}}{0,2 + 4 \cdot 10^{-2}} \right] = \boxed{19,4 \text{ s}}$

Modélisation de la cartouche :



m pores de rayon r par unité de section $\Rightarrow m S_0$ pores en parallèle $\Rightarrow Dv = m S_0 dv_{\text{pore}}$

$$Dv = m S_0 \frac{\pi \Delta P_m r^4}{8 \eta l} \quad \Rightarrow \frac{Dv}{S_0} = \frac{\phi \Delta P_m r^2}{8 \eta l} = \frac{k \Delta P_m}{\eta l}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\phi r^2}{8}$$

Porosité $\phi = \frac{V_{\text{pores}}}{V_{\text{tot}}} = \frac{m S_0 \pi r^2 l}{S_0 l} = m \pi r^2$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{8k}{\phi}} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ m} = \underline{0,07 \text{ mm}}$$

Grille d'évaluation : Carafe filtrante

+

-

Analyser et s'approprier le problème (4 points)			
Savoir exploiter les informations	- Interprétation des paramètres de la relation $S(z) = S_0(1+z/h_1)$ - Perméabilité et porosité du charbon actif		
Savoir choisir les domaines de concepts physiques et les notions utiles	- Ecoulement rampant d'un fluide visqueux		
Savoir poser un problème	-Utiliser l'identification du débit volumique dans la cartouche et l'entonnoir pour accéder au bilan différentiel de la vidange - Relier la porosité au rayon des pores		
Mise en place d'une stratégie de résolution (9 points)			
Construire un modèle	-Ecoulement dans le charbon actif selon la loi de Darcy - Modélisation des pores par des cylindres parallèles		
Introduire les paramètres physiques pertinents	- Débit volumique - pression motrice $P_m = P + \rho g z$ - S_0 : section du milieu poreux - l : hauteur du milieu poreux - h_1 : hauteur d'eau à $t = 0$ - $z(t)$: hauteur d'eau à t - nombre de pores - rayon d'un pore		
Introduire des simplifications pertinentes	-Régime permanent -Fluide incompressible -Ecoulement unidimensionnel dans l'entonnoir - Répartition homogène des pores sur la section		
Maîtriser les lois physiques et leurs domaines d'application	-Loi de Darcy -Vitesse de l'eau -Conservation du débit volumique -Définition de la porosité -Relation de la statique des fluides -Additivité des débits volumiques des pores en parallèle -Nombre de Reynolds		
Choix et maîtrise des outils mathématiques	-Orientation de l'axe vertical des altitudes -Utilisation de $S(z)$ -Ecriture de l'équation différentielle (signes) -Intégration de l'équation différentielle		
Savoir réaliser efficacement les calculs analytiques et l'application numérique	-Calcul de la durée + A.N. -Expression et calcul du rayon des pores +A.N.		
Faire une analyse critique de la démarche (4 points)			
Critique du modèle	-Commentaire -Validation de l'hypothèse sur l'écoulement par le calcul du nombre de Reynolds		
Interagir et communiquer (3 points)			
	Clarté de l'exposé.		
	Capacité de réponse aux questions de l'examinateur.		
	Capacité d'écoute		
	Capacité d'exploitation des informations et documents fournis par l'examinateur.		