

# Confiture

Ce problème s'intéresse à deux aspects physiques de la préparation de la confiture :

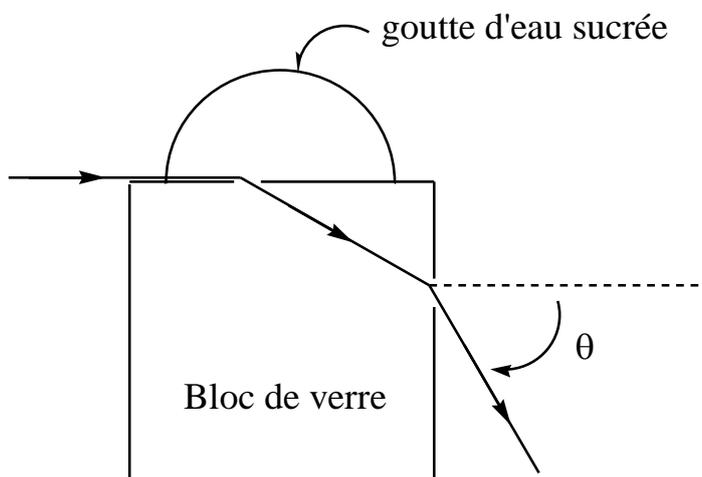
- La vitesse d'évaporation de l'eau sucrée : ce qui permet de contrôler la teneur en sucre de la confiture.
- Le refroidissement du pot de confiture.

## Question simple :

- Rappeler les lois de Snell-Descartes pour les phénomènes de réflexion et réfraction des ondes lumineuses.
- Etablir la condition de réflexion totale

## Questions ouvertes

1. Une goutte d'eau sucrée (modélisée par une demi-sphère) est déposée sur un bloc de verre d'indice de réfraction très important et éclairée par un faisceau lumineux d'incidence rasante (parallèle au bloc de verre). Le faisceau pénètre dans la goutte puis est réfracté dans le bloc de verre. On mesure l'angle de sortie de ce bloc de verre.



En une heure l'angle  $\theta$  passe de  $74^\circ$  à  $72^\circ$

**Déterminer le pourcentage d'eau évaporée après une heure.**

**Donnée :** indice du verre  $n_{\text{verre}} = 1,65$

Données : indices de réfraction  $n$  de l'eau selon la concentration  $C$  en sucre

$C(\text{g.L}^{-1})$	50	100	200	300	400	500	600	700
$n$	1.34027	1.34782	1.36382	1.38112	1.39982	1.4204	1.44187	1.46539

2. De la confiture bouillante est introduite dans un pot en verre. Très rapidement la température du bocal en verre et de la confiture s'équilibrent autour de  $90^\circ\text{C}$ . Le pot est ensuite rapidement fermé par un couvercle en acier et laissé à température ambiante.

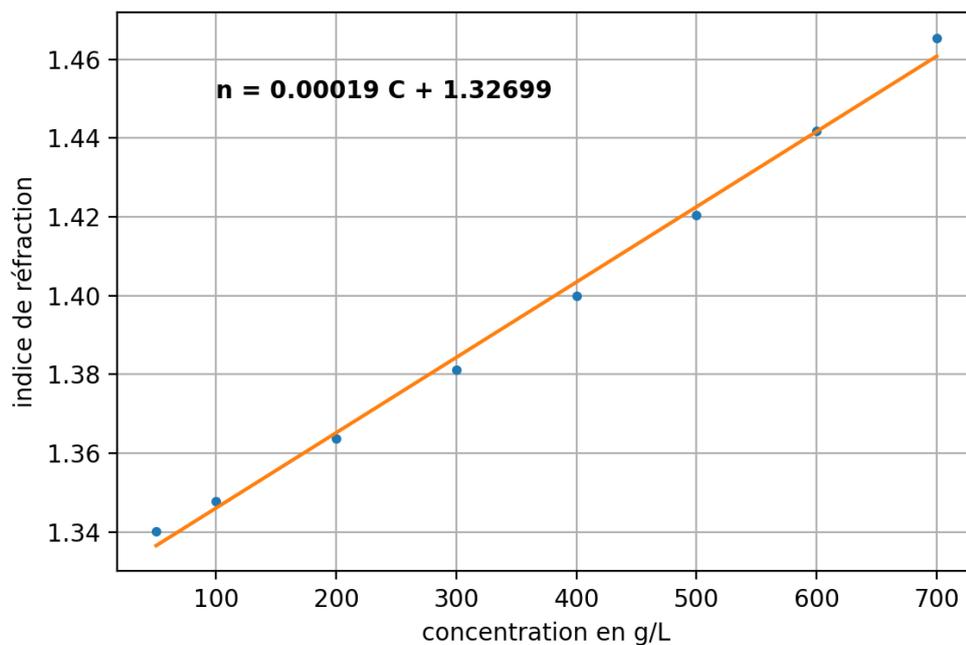
**Combien de temps faut-il attendre avant de pouvoir saisir les pots sans risque ( $T < 45^\circ\text{C}$ ) ?  
On supposera que la confiture et le pot sont à la même température à un instant  $t$ .**

## Données

Diamètre intérieur du pot	$D = 7 \text{ cm}$
Hauteur intérieure du pot	$H = 8,5 \text{ cm}$
Masse confiture	$m = 350 \text{ g}$
Capacité thermique massique de la confiture	$c = 2750 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Masse du bocal en verre	$m_v = 195 \text{ g}$
Capacité thermique massique du verre	$c_v = 800 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Coefficient de transfert conducto convectif entre le pot et l'air ambiant	$h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$
Surface d'échange entre le pot de verre et l'air	$S = 225 \text{ cm}^2$

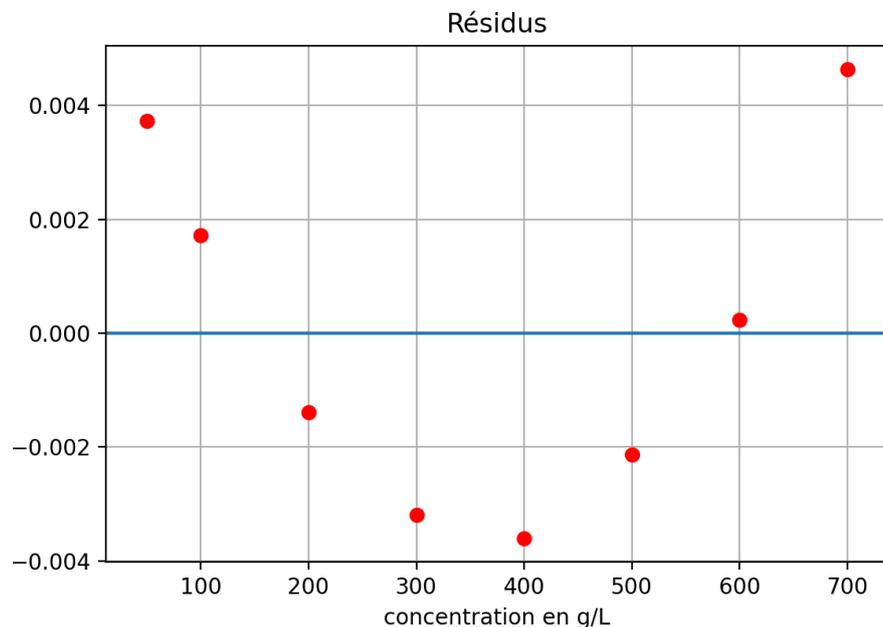
## Document 1

```
1 #Importation des bibliothèques
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 #Valeurs expérimentales
6 X=[50,100,200,300,400,500,600,700]
7 Y=[1.34027,1.34782,1.36382,1.38112,1.39982,1.4204,1.44187,1.46539]
8
9 #Modélisation
10 p=np.polyfit(X,Y,1) #renvoie une liste [coef. dir., ord. origine]
11
12 #Tracé du nuage de points et de la droite modèle
13 plt.figure(1)
14 plt.plot(X , Y ,'.')
15 plt.plot(X,np.polyval(p,X))
16 plt.xlabel('concentration en g/L')
17 plt.ylabel('indice de réfraction')
18 plt.text(100,1.45,f"n = {round(p[0],5)} C + {round(p[1],5)}",fontweight='bold')
19 plt.grid()
20 plt.show()
```



# Document supplémentaires à donner pendant l'interrogation

## Document 2



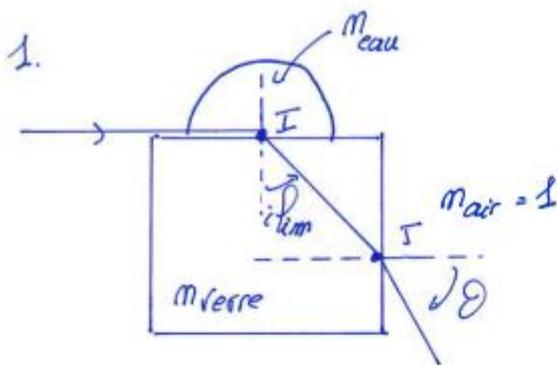
Commenter la courbe ci-dessus représentant le tracé des résidus de la courbe donnée dans le document 1.

## Document 3

Compléter le script ci-dessous permettant de calculer l'incertitude sur l'indice de réfraction de l'eau sucrée par la méthode de Monté Carlo.

```
1 from math import *
2 import numpy as np
3
4 # données
5 nverre = 1.65 # indice du verre #rayon interne
6 theta = 74*np.pi/180
7
8 #Demi intervalle d'erreur sur l'angle théta
9 a_theta=0.2/180*np.pi
10
11 #Calcul de l'indice de réfraction de l'eau sucrée et de son incertitude type
12 N=10000
13 theta_MC = theta + a_theta*np.random.uniform(-1,1,N)
14 neau_MC = # à compléter pour créer le tableau neau_MC contenant les valeurs de l'indice de
15           | # réfraction de l'eau obtenues à partir des tirages aléatoires de l'angle théta.
16
17 neau_moy= # à compléter pour calculer la valeur moyenne de l'indice de l'eau sucrée
18 sigma_neau=np.std(neau_MC,ddof=1)
19 print('indice de réfraction de l eau sucrée',neau_moy,' +/-',sigma_neau)
20 print(sigma_neau)
```

correction: Conférence.



- (H) goutte =  $\frac{1}{2}$  sphère
- Le rayon pénètre dans le verre en I du fait d'une imperfection de la surface.

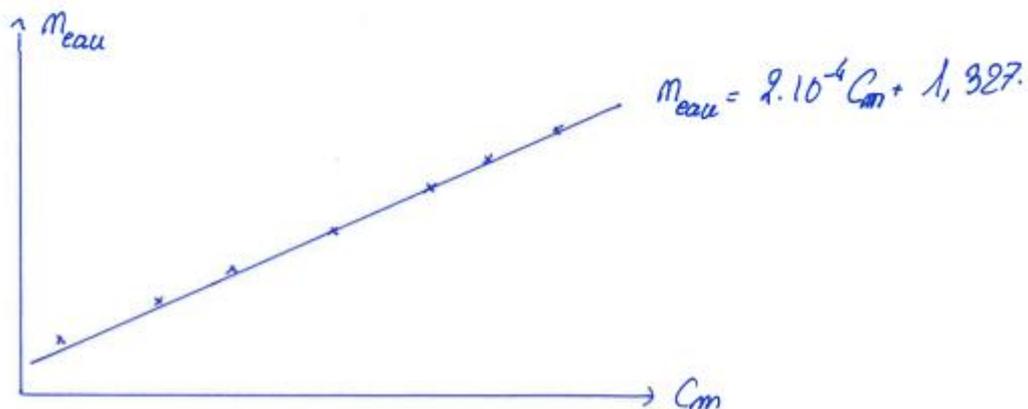
En I :  $n_{\text{eau}} = n_{\text{verre}} \sin i_{\text{lim}} \Rightarrow \sin i_{\text{lim}} = \frac{n_{\text{eau}}}{n_{\text{verre}}}$

en J :  $n_{\text{verre}} \sin \left( \frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}} \right) = n_{\text{air}} \sin \theta$

$\Rightarrow \sin \theta = n_{\text{verre}} \cos i_{\text{lim}} = n_{\text{verre}} \sqrt{1 - \sin^2 i_{\text{lim}}}$

$\Rightarrow \sin \theta = n_{\text{verre}} \sqrt{1 - \left( \frac{n_{\text{eau}}}{n_{\text{verre}}} \right)^2} = \sqrt{n_{\text{verre}}^2 - n_{\text{eau}}^2}$

$\Rightarrow n_{\text{eau}} = \sqrt{n_{\text{verre}}^2 - \sin^2 \theta}$



$\theta$	$74^\circ$	$72^\circ$
$m_{\text{eau}}$	1,341	1,348
$C_m$ (g.L <sup>-1</sup> )	70	105

$$m_{\text{verre}} = 1,65$$

$$C_{m_i} = \frac{m_{\text{sucrose}}}{V_i} \Rightarrow \frac{C_{m_i}}{C_{m_f}} = \frac{V_f}{V_i} \quad \text{AN: } \frac{V_f}{V_i} = 67\%$$

$$C_{m_f} = \frac{m_{\text{sucrose}}}{V_f} \Rightarrow \text{il y a donc } 33\% \text{ d'eau évaporée.}$$

2. Soit  $\phi_{th}$  le flux thermique entre {pot+confiture} et l'air extérieur

$$\phi_{th} = hS(T - T_a)$$

1er principe en équilibre isobare:

$$dH = dQ \Rightarrow (mc + m_v c_v) dT = -hS(T - T_a) dt$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{hS}{mc + m_v c_v} T = \frac{hS}{mc + m_v c_v} T_a$$

$$\text{Posons } \tau = \frac{mc + m_v c_v}{hS} \Rightarrow T(t) = A e^{-t/\tau} + T_a$$

$$\text{[C]} T(t=0) = T_0 = A + T_a \Rightarrow T(t) = (T_0 - T_a) e^{-t/\tau} + T_a$$

$$\text{Soit } T_f \text{ la température finale de } 45^\circ\text{C. } T_f = (T_0 - T_a) e^{-t_f/\tau} + T_a$$

$$\Rightarrow t_f = \tau \ln \frac{T_0 - T_a}{T_f - T_a} \quad \text{AN: } t_f = 85 \text{ min}$$

$$T_a = 20^\circ\text{C.}$$

$$\tau \approx 83 \text{ min.}$$

```

11 #Calcul de l'indice de réfraction de l'eau sucrée et de son incertitude type
12 N=10000
13 theta_MC = theta + a_theta*np.random.uniform(-1,1,N)
14 neau_MC = np.sqrt(nverre**2 - np.sin(theta_MC)**2)
15 neau_moy=np.average(neau_MC)
16 sigma_neau=np.std(neau_MC, ddof=1)
17 print('indice de réfraction de l'eau sucrée', neau_moy, '+/-', sigma_neau)
18 print(sigma_neau)

```