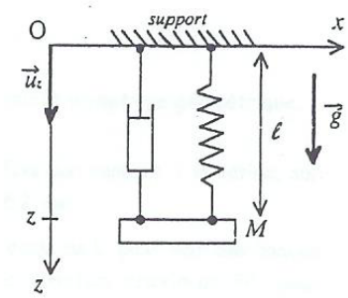
Pont de l'Artuby

Question simple
Soit un oscillateur amorti vertical (raideur du ressort k et coefficient d'amortissement h). La position de la masse m est repérée par la coordonnée z. Exprimer l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. En déduire l'équation différentielle vérifiée par z(t).



Question ouverte
Le pont de l'Artuby dans le Var est composé d'une arche unique de 107 mètres et surplombe d'une hauteur de 138 mètres les gorges de la rivière de l'Artuby qui se jette dans le Verdon. Le saut est-il sûr ?

Document 1 : caractéristiques techniques des cordes élastiques utilisées

	Type XS	Type S	Type M	Type L
Masse du sauteur	25 à 45 kg	40 à 70 kg	65 à 95 kg	90 à 120 kg
Longueur à vide	10 m	20 m	30 m	40 m
Élasticité*	100 kg	160 kg	200 kg	250 kg

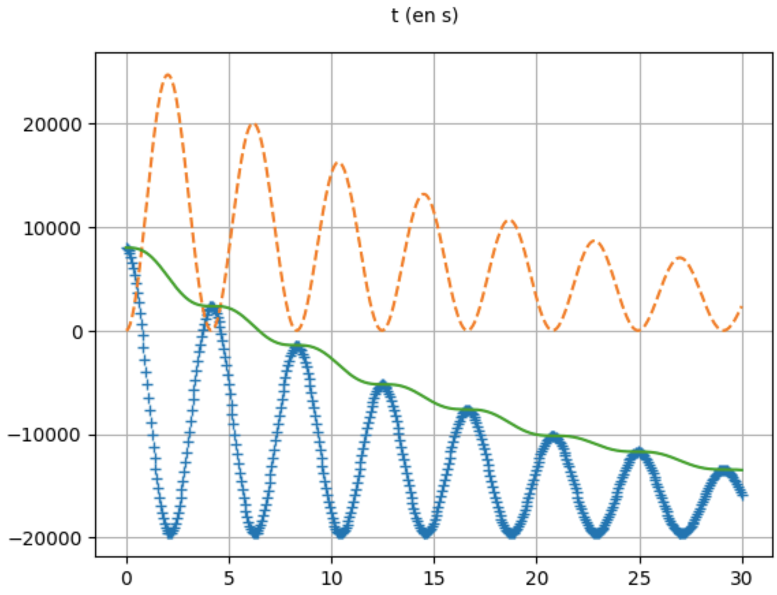
*L'élasticité est la masse à appliquer pour augmenter la longueur de la corde de 100 %.

Document 2 : simulation pour un saut réalisé avec une corde de type S (énergie potentielle, énergie cinétique et énergie mécanique)

```
import numpy as np  # Pour avoir les tableaux numpy
import matplotlib.pyplot as plt  # Pour les graphiques
from scipy.integrate import odeint  # Pour la résolution d'équa. diff.


#caractéristiques de l'oscillateur
m = 70        #kg
l0 = 20       #m
k = "A COMPLETER"        #N/m
g = 9.81      #m/s
omega0 = "A COMPLETER"  # rad/s
Q = 15

# Conditions initiales
z0 = 0  # m
zeq = 37 #m
v0 = 0    # m/s
Y0 = [z0, v0]
```

```python
def f(Y, t):
    """Fonction associée à l'équation différentielle"""
    # x et v sont les deux éléments de Y
    z = Y[0]
    v = Y[1]
    return [v, "A COMPLETER"]

# Valeurs de t pour lesquelles on veut la solution
# 2000 points entre 0 et 5 s
t = np.linspace(0, 30, 500)

# Résolution proprement dite
solution = odeint(f, Y0, t)

# Les colonnes de solution contiennent les valeurs de x et v
z = solution[:, 0]
v = solution[:, 1]

Ep = "A COMPLETER"
Ec = "A COMPLETER"
Em = Ep + Ec

plt.plot(t,Ep,'+',label='Ep')
plt.plot(t,Ec,'--',label='Ec')
plt.plot(t,Em)
plt.grid()
plt.show()
```

Réponse du script



https://colab.research.google.com/drive/1Zl_Gn2BNAFnFV8qqfRA-w378Yb2VZmzi?usp=sharing

Correction

Question simple :
Système : la masse assimilée à un point matériel de masse m

Bilan des forces :
- Force de rappel du ressort (force conservative)
- Poids (force conservative)
- Force de forcement fluide (non conservative) : $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$

Expression de l'énergie potentielle : $E_p(z) = -mgz + \frac{1}{2}k(z - l_0)^2$

Expression de l'énergie cinétique : $E_c(z) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$

Étude de l'équilibre :
A l'équilibre, l'énergie potentielle est minimale : $(\frac{dE_p}{dz})_{z_{éq}} = 0$

$$\frac{dE_p}{dz} = -mg + k(z - l_0)$$

Ainsi : $z_{éq} = \frac{mg}{k} + l_0$

RQ : $\frac{d^2E_p}{dz^2} = k > 0$ donc position d'équilibre stable

Étude du mouvement :

$$\text{TEM : } \frac{dE_m}{dt} = P_{FNC}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}k(z - l_0)^2) = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

$$m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} + k\dot{z}(z - l_0) = -h \cdot \dot{z}^2$$

On élimine la solution $\dot{z} = 0$:

$$m\ddot{z} - mg + k(z - l_0) = -h \cdot \dot{z}$$

On introduit $z_{éq} = \frac{mg}{k} + l_0$:

$$m\ddot{z} + k\left(z - z_{éq}\right) = -h \cdot \dot{z}$$

Pour on met sous forme canonique :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_{éq}$$

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + {\omega_0}^2 z = {\omega_0}^2 z_{éq}$$

avec Q facteur de qualité et ω_0 pulsation propre de l'oscillateur

Question ouverte :
Le saut est sûr si l'amplitude maximale z_m de la corde reste inférieure à la hauteur du pont.

L'oscillateur est un oscillateur amorti. L'amplitude maximale est nécessaire inférieure ou égale à celle du même oscillateur non amorti. En supposant que l'énergie mécanique se conserve et que le sauteur saute sans vitesse initiale :

$$E_c(z_m) + E_p(z_m) = E_c(0) + E_p(0)$$
$$-mgz_m + \frac{1}{2}k(z_m - l_0)^2 = 0$$
$${z_m}^2 - 2\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) + {l_0}^2 = 0$$

La résolution donne : $z_m = z_{éq} + \sqrt{{z_{éq}}^2 - {l_0}^2}$

Pour réaliser une AN, il convient d'évaluer k.
D'après la question simple : $z_{éq} = \frac{mg}{k} + l_0$
D'après le tableau fourni, l'élasticité est la masse à appliquer pour doubler la longueur de la corde : $z_{éq} = 2l_0$. Donc $k = \frac{mg}{l_0}$

type	XS	S	M	L
masse m_t testée en statique (kg)	100	160	200	250
k ($\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$)	24,5	39,2	49,1	61,3

type	XS	S	M	L
masse m maximale supportée (kg)	45	70	95	120
altitude maximale z_m (m)	100	99	102	103

Le saut est donc sûr car $z_m < 107\ m$
En revanche, si la corde est inadaptée, il peut y avoir danger : personne de 120 kg avec un corde de type L : $z_m = 166\ m$!

Programme Python
On peut demander de compléter les lignes 9, 11, 26, 39 et 40
On peut demander d'identifier les courbes $E_c(t)$, $E_p(t)$ et $E_m(t)$.