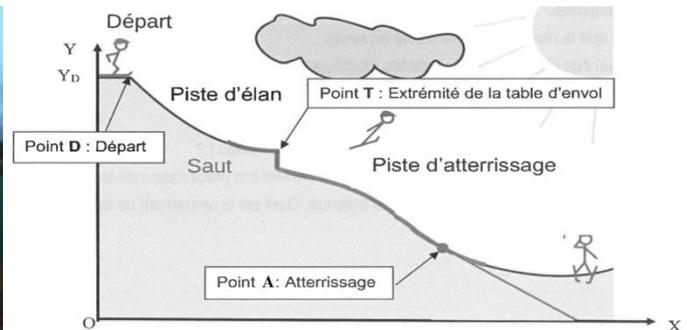


# Saut à ski

Le 18 mars 2018, l'Autrichien Stefan Kraft a battu le record du monde de saut à ski avec un vol de 253,5 mètres sur le grand tremplin de Vikersund.



Les données sont les suivantes

- La piste d'élan est modélisée par un plan incliné faisant un angle  $\theta = 36^\circ$ . La longueur parcourue par le skieur sur cette piste avant l'envol est  $L = 200$  m.
- Sur une distance négligeable, la fin de la piste d'élan est moins inclinée et forme un angle  $\alpha = 11^\circ$  avec l'horizontale au niveau du point T (extrémité de la table d'envol).
- La piste d'atterrissage sera modélisée par un deuxième plan incliné d'équation  $y = -0,59x$  dans un repère centré au point T.
- Le record du monde de Stefan Kraft est tel que l'abscisse du point A d'atterrissage dans ce repère est  $x_A = 217$  m. La longueur du saut correspond à la distance TA.

Autres données :

- Masse du skieur :  $m = 70$  kg
- Accélération de la pesanteur :  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$
- *Au niveau du point T Stefan Kraft a atteint une vitesse limite proche de  $90 \text{ km.h}^{-1}$*

**Question simple** : déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire d'une chute parabolique dans référentiel terrestre ainsi que l'expression de la portée

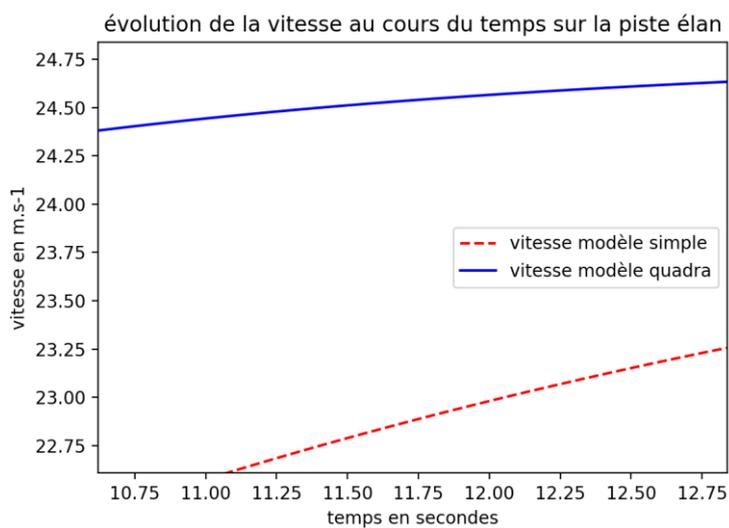
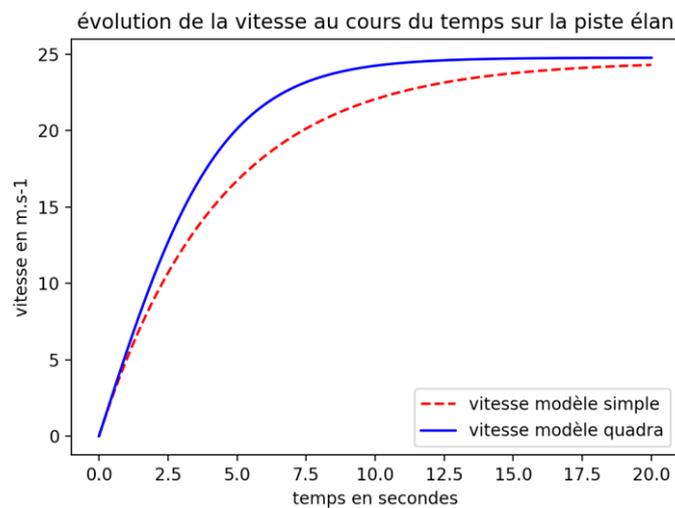
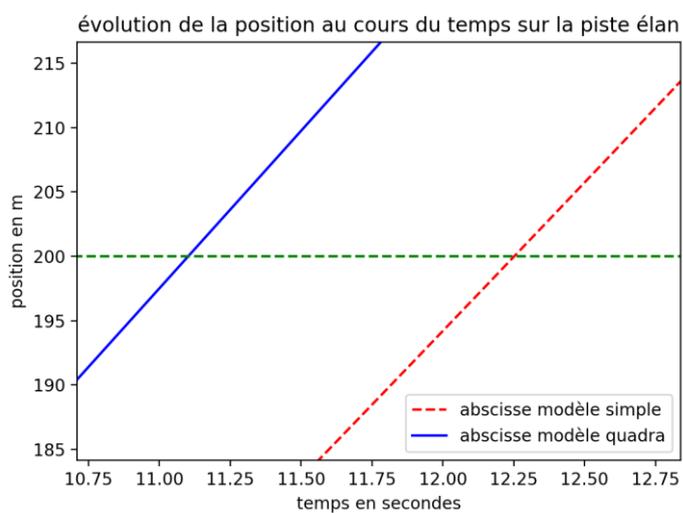
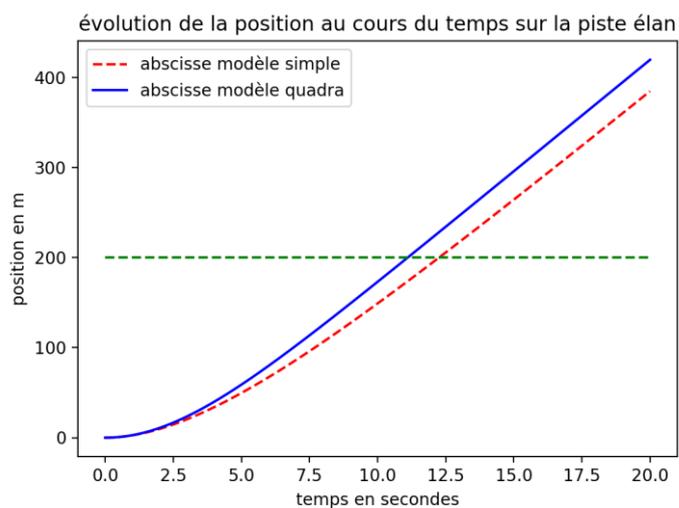
**Question ouverte** : Proposez un modèle physique pour retrouver la longueur du saut du skieur sur ce tremplin. On pourra introduire deux modèles pour la force de frottement sur la piste d'élan : une intensité de la force proportionnelle à la vitesse ou au carré de la vitesse.

On complètera les lignes 17, 18 et 45 du script Python fourni, qui donne l'évolution de la vitesse et de la position sur la piste d'élan pour chaque modèle de la force de frottement et on commentera les courbes obtenues pour chaque modèle.

## Script Python

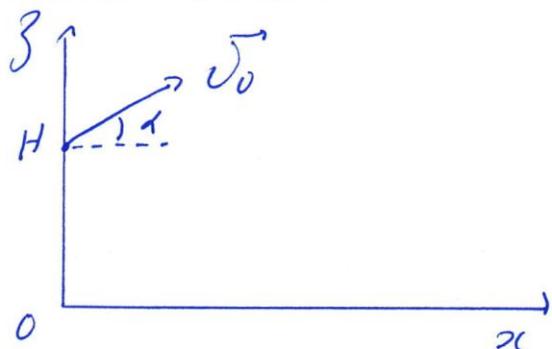
```
1 #Importation des bibliothèques
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4
5 #Données numériques
6 g=9.8 #accélération de la pesanteur en m/s2
7 m=70 # masse du skieur en kg
8 theta = 0.63 # angle du plan incliné en radians
9 beta = 16 # coefficient de la force de frottement du modèle simple en USI
10 mu = 0.61 # coefficient de la force de frottement du modèle quadratique en USI
11 L = 200 # longueur du plan incliné en m
12
13 # l'axe (0x) choisi pour définir la position du skieur sur la piste d'élan est parallèle au plan incliné
14
15 # calcul de la position et de la vitesse dans le cas du modèle simple, avec f = - beta * v
16 T_simple=np.linspace(0,20,1000)
17 v_simple = [# A COMPLETER ]
18 x_simple = [# A COMPLETER ]
19
20
21
22 # calcul de la position et de la vitesse dans le cas du modèle quadratique par la méthode d'Euler avec
23 # f = - mu*v**2
24
25 #Paramètres de la méthode d'intégration
26 deltat=0.001 # pas de calcul en s
27 duree = 20 # durée d'intégration en s
28
29 #Initialisation de listes
30 LT_quadra=[0] #Liste des dates successives
31 Lv_quadra = [0] #Liste des vitesses successives
32 Lx_quadra=[0] #Liste des positions successives
33
34 #Définition d'une fonction permettant de calculer l'intensité de la force de frottements
35 def F(v) :
36     return -mu*v*v
37
38 #Boucle d'intégration Euler permettant le calcul des positions et des vitesses successives
39 nbpts=duree/deltat
40 i=1
41 while i<=nbpts :
42     v=Lv_quadra[-1]
43     x=Lx_quadra[-1]
44     LT_quadra.append(i * deltat)
45     Lv_quadra.append(# A COMPLETER)
46     Lx_quadra.append(x + v * deltat)
47     i=i+1
48
49 plt.figure(1)
50 plt.plot(T_simple,v_simple,'r--',label='vitesse modèle simple')
51 plt.plot(LT_quadra,Lv_quadra,'b-',label='vitesse modèle quadra')
52 plt.title("évolution de la vitesse au cours du temps sur la piste d'élan")
53 plt.xlabel('temps en secondes')
54 plt.ylabel('vitesse en m.s-1')
55 plt.legend()
56 plt.figure(2)
57 plt.plot(T_simple,x_simple,'r--',label='abscisse modèle simple')
58 plt.plot(LT_quadra,Lx_quadra,'b-',label='abscisse modèle quadra')
59 plt.plot(T_simple,len(T_simple)*[200], 'g--')
60 plt.title("évolution de la position au cours du temps sur la piste d'élan")
61 plt.xlabel('temps en secondes')
62 plt.ylabel('position en m')
63 plt.legend()
64 plt.show()
```

## Courbes obtenues à l'aide du script Python



## Saut à ski

### Question simple.



- {projectile masse m}

$$\text{PFD: } \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t & (1) \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t + H & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$(2) \Rightarrow z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha + H$$

- La portée est définie comme la valeur de  $x$  pour laquelle  $z=0$

Résolution du trinôme du second degré

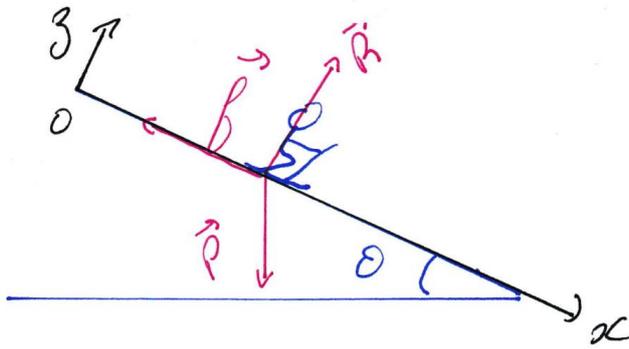
$$\Delta = \tan^2 \alpha + \frac{2gH}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha} (v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH)$$

$$x = \frac{-\tan \alpha - \sqrt{\Delta}}{-\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{v_0 \cos \alpha} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH} \right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \left( v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH} \right)$$

## Question ouverte

### a. piste d'élan



- \* { skieur }
- \* référentiel terrestre galiléen
- \* repère  $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$

\* Forces:

$$\vec{P} = mg(\sin\theta \vec{e}_x - \cos\theta \vec{e}_z)$$

$$\vec{P} = R \vec{e}_z$$

• modèle simple:  $\vec{f} = -\beta \vec{v}$

PFD selon  $\vec{e}_x$ :  $m \frac{dv}{dt} = -\beta v + mg \sin\theta$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m} v = g \sin\theta$  en pose  $\tau = \frac{m}{\beta}$

$\Rightarrow v(t) = \frac{g \sin\theta}{\beta} (1 - e^{-t/\tau})$  : ligne 17 du script.  
 $v(t=0) = 0$

or  $v = \frac{dx}{dt} = \frac{g \sin\theta}{\beta} (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow x(t) = \frac{g \sin\theta}{\beta} (t + \tau e^{-t/\tau})$   
 $x(t=0) = 0 \rightarrow$  ligne 18 du script.

• modèle quadratique:  $\vec{f} = -\mu v^2 \vec{e}_x$

PFD selon  $\vec{e}_x$ :  $m \frac{dv}{dt} = -\mu v^2 + mg \sin\theta$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m} v^2 + g \sin\theta$

$\Rightarrow$  ligne 45:  $L_v$  quadratique append  $(v + \text{del} \text{ tout } (-\frac{\mu}{m} v^2 + g \sin\theta))$

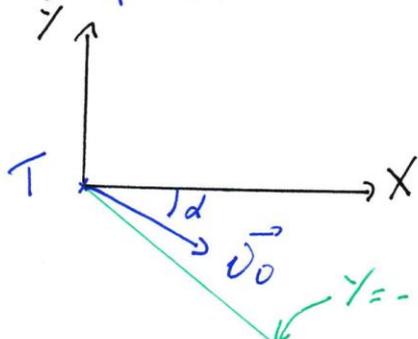
Exploitation des graphiques : on cherche le temps pour lequel le skieur est au bout de piste ( $x = 900\text{m}$ ) et on en déduit sa vitesse.

\* modèle simple:  $t = 19,9\text{s} \Rightarrow v = 23\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 83\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

\* modèle quadratique:  $t = 11\text{s} \Rightarrow v = 25\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 90\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

D'après les données sur la vitesse du skieur au point T, le modèle quadratique est plus adapté.

b) phase de vol



on reprend le résultat de la question simple (" $v_0$  vers le bas")

$$\Rightarrow Y = -\frac{1}{2} g \frac{X^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} - X \tan \alpha$$

$Y = -0,59X$  : piste d'atterrissage.

A : point d'atterrissage.

$$-\frac{1}{2} g \frac{X_A^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} - X_A \tan \alpha = -0,59 X_A$$

$$\text{car } X_A \neq 0 \Rightarrow X_A = \frac{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} (0,59 - \tan \alpha)$$

AN:  $X_A = 48,6\text{m}$  (pour  $v_0 = 25\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )

en: résultat loin de la valeur expérimentale car :

- force verticale dite de "portance" due à la posit° du skieur en vol
- $\vec{v}_0$  quasi colinéaire à (TX) initialement car le skieur pousse sur ses jambes en quittant le tremplin.