

Formation et chute d'un flocon de neige

Question simple.

Définir la notion de flux thermique conducto-convectif et donner son expression lorsqu'il peut être modélisé par la loi de Newton. On notera h le coefficient surfacique associé à cette loi.

Dans le cadre d'un régime quasi-stationnaire établir la loi $T(t)$ donnant l'évolution temporelle de la température d'un corps incompressible de masse m et de capacité thermique massique c soumis au seul échange thermique conducto-convectif avec le milieu extérieur qui l'entoure à la température T_e . Proposer un circuit électrique analogue modélisant l'évolution de ce système.

Question ouverte.



Pour améliorer l'enneigement des pistes de ski on utilise de la neige produite artificiellement à l'aide de canons à neige.

Le canon à neige pulvérise de fines gouttes d'eau liquide dans l'air ambiant suffisamment froid, dont la température doit être inférieure à la température de fusion de l'eau. Les gouttes d'eau liquide produites se refroidissent lors de l'échange thermique avec l'air extérieur jusqu'à une température voisine de 0°C puis se solidifient sous forme de flocons de neige.

Vous proposerez une modélisation des phénomènes permettant de calculer le temps de formation d'un flocon de neige à partir d'une goutte d'eau liquide et de le comparer au temps de chute d'une goutte que l'on calculera afin de rechercher la hauteur à laquelle le canon doit être placé pour que l'eau qu'il projette soit transformée en neige avant son arrivée au sol. Vous expliquerez quel est l'intérêt de pulvériser l'eau sous forme de gouttelettes très fines.

Données :

Masse volumique de l'eau liquide $\rho_l = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

Rayon d'une goutte d'eau pulvérisée : $R = 0,1 \text{ mm}$

Coefficient de transfert thermique par conducto-convection de la goutte vers l'atmosphère : $h = 65 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

Température de l'air atmosphérique : $T_e = -15^\circ\text{C}$

Température de l'eau pulvérisée à la sortie du canon à neige : $T_0 = 15^\circ\text{C}$

Chaleur latente de fusion de la glace à la température de fusion $T_F = 0^\circ\text{C}$: $L_F = 333 \text{ kJ.kg}^{-1}$

Capacité thermique massique de l'eau liquide : $C_l = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}$

Viscosité dynamique de l'air à -15°C : $\eta_{\text{air}} = 2.10^{-5} \text{ Pa.s}$

Masse molaire de l'air : $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$.

Solution : question ouverte1. FORMATION DU FLOCON :

2 étapes :

1°) Refroidissement de la goutte d'eau liquide (supposée sphérique de rayon R constant) au cours du temps, de la température à la sortie du canon ($T_0 = 15^\circ\text{C}$) jusqu'à la température de fusion ($T_1 = 0^\circ\text{C}$) par convection thermique vers l'air atmosphérique à la température T_e . Le flux thermique mis en jeu peut être modélisé par $\Phi_{th} = h.(T(t)-T_e).S$, S étant la surface externe de la goutte d'eau supposée sphérique ($S = 4\pi R^2$). On suppose la température uniforme dans la goutte.

2°) Solidification de l'eau liquide à $T_F = 0^\circ\text{C}$.

La durée de formation du flocon est donc la somme des durées de chaque processus.

1°) Refroidissement de la goutte liquide de T_0 à $T_F = 0^\circ\text{C}$:

En utilisant le premier principe de la thermodynamique sur une durée dt , en supposant la goutte indéformable ($\delta W_{pr}=0$), en équilibre mécanique avec le milieu ambiant ($P = P_{atm} = cte$) :

$$dH = \delta Q \Leftrightarrow m.C_l.dT = \Phi_{th}.dt \Leftrightarrow \rho_l.\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right).C_l.dT = h.(T_e - T(t)).4\pi R^2.dt$$

$$\text{Soit : } \frac{dT}{dt} + \frac{3h}{\rho_l R C_l} T(t) = \frac{3h}{\rho_l R C_l} T_e \Rightarrow T(t) = A e^{\left(-\frac{3h}{\rho_l R C_l}\right)t} + T_e \text{ avec } T(t=0) = T_0 \Rightarrow T_0 = A + T_e \text{ d'où :}$$

$$T(t) = (T_0 - T_e).e^{\left(-\frac{3h}{\rho_l R C_l}\right)t} + T_e.$$

La durée t_1 du refroidissement de T_0 à T_F est telle que :

$$t_1 = \frac{\rho_l R C_l}{3h} \text{Ln} \left(\frac{T_0 - T_e}{T_F - T_e} \right) = \frac{10^3 \times 0,1 \times 10^{-3} \times 4,18 \cdot 10^3}{3 \times 65} \text{Ln} \left(\frac{15 + 15}{0 + 15} \right) = 1,5 \text{ s.}$$

2°) la chaleur libérée lors de la solidification de la fraction x^l de la masse totale est évacuée par convection vers l'extérieur. Le premier principe appliqué à la masse dm solidifiée pendant dt donne : $dm.(-L_F) = \Phi_{th}.dt = h.(T_e - T_F).S.dt$.

En intégrant sur la durée t_2 de solidification : $m.(-L_F) = h.(T_e - T_F).S.t_2$

$$\Leftrightarrow \rho_l \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot (-L_F) = h \cdot (T_e - T_F) \cdot 4\pi R^2 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\rho_l \cdot R \cdot L_F}{3 \cdot h \cdot (T_F - T_e)} = \frac{10^3 \times 0,1 \cdot 10^{-3} \times 333 \cdot 10^3}{3 \times 65 \times (0+15)} = \mathbf{11,4 \text{ s.}}$$

Le temps de formation du flocon est donc : $t_1+t_2 = 12,9 \text{ s.}$

2. TEMPS DE CHUTE DE LA GOUTTE D'EAU :

Goutte d'eau soumise à son poids $m\vec{g}$, à la force de freinage de l'air $-6\pi\eta_a R\vec{v}$, à la poussée d'Archimède de l'air (négligeable car $\rho_{\text{air}} \ll \rho_{\text{eau}}$).

Le P.F.D. appliqué à la goutte donne : $\frac{m d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 6\pi\eta_a R\vec{v}$.

La vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{m}{6\pi\eta_a R} \vec{g} = \frac{\rho_l \cdot \frac{4}{3} \pi R^3}{6\pi\eta_a R} \vec{g} = \frac{2}{9} \frac{\rho_l R^2}{\eta_a} \vec{g}$ est rapidement atteinte.

$$\text{A.N. : } v_{\text{lim}} = \frac{2 \times 10^3 \times (0,1 \cdot 10^{-3})^2 \times 9,81}{9 \times 2 \cdot 10^{-5}} = \mathbf{1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

$$\text{Durée de chute depuis une hauteur } h : t = \frac{h}{v_{\text{lim}}} = \frac{9h\eta_a}{2\rho_l R^2 g}.$$

Le temps de transformation de la goutte liquide en neige étant de 12,7 s il faudrait que la buse du canon soit placée au moins à une hauteur de **12,9 m** par rapport au sol pour que la goutte arrive bien au sol sous forme de neige.

-Influence du rayon de la goutte : d'après 1. Le temps de solidification augmente de manière proportionnelle au rayon et d'après 2. Le temps de chute sera inversement proportionnel au carré du rayon => intérêt de pulvériser de l'eau sous forme de gouttes très fines à la sortie du canon pour qu'elles aient le temps de se solidifier avant d'arriver au sol.

- critiques du modèle :

La hauteur de la buse par rapport au sol est surestimée.

Phénomènes négligés dans la modélisation :

- Diminution de la masse de la goutte lors de sa chute à cause de la diffusion des molécules d'eau de la goutte vers l'extérieur.

- Variation de volume lors de la solidification car $\rho_l > \rho_{\text{glace}}$.

- Vérification de la validité du modèle utilisé pour la force de trainée par le calcul du nombre de Reynolds : $R = \frac{v_{\text{lim}} \cdot 2R \cdot \rho_{\text{air}}}{\eta_{\text{air}}}$ en calculant la masse volumique de l'air à -15 °C selon le modèle du

$$\text{GP : } \rho_{\text{air}} = \frac{MP}{RT} = 1,37 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

$\Rightarrow R = 13,7$: l'écoulement est laminaire mais pas rampant .

Grille d'évaluation : formation et chute d'un flocon de neige

		+	-
Analyser et s'appropriier le problème (4 points)			
Savoir exploiter les informations	-Donnée des températures et description du procédé => étude du refroidissement de l'eau liquide puis solidification du liquide. -Etude de la chute d'une goutte dans l'air.		
Savoir choisir les domaines de concepts physiques et les notions utiles	Transfert thermique par convection. Thermodynamique des changements de phase ; solidification. Dynamique du point. Force de traînée.		
Savoir poser un problème	Décomposer la formation du flocon en deux étapes : refroidissement de l'eau liquide puis solidification.		
Mise en place d'une stratégie de résolution (7 points)			
Construire un modèle	Refroidissement de la goutte par transfert convectif vers l'air atmosphérique. Solidification. Chute de la goutte dans le champ de pesanteur avec frottement fluide de l'air.		
Introduire les paramètres physiques pertinents	Masse volumique de l'eau. Rayon de la goutte. Température initiale, température de fusion. Capacité thermique massique de l'eau. Chaleur latente de fusion. Viscosité de l'air.		
Introduire des simplifications pertinentes	Goutte de rayon et de masse constants. Température de la goutte uniforme. Pression constante. Poussée d'Archimède négligeable. Durée du régime transitoire de chute de la goutte négligé.		
Maîtriser les lois physiques et leurs domaines d'application	Expression du transfert thermique par convection. Premier principe sous forme de bilan enthalpique à P cte Bilan enthalpique. Principe fondamental de la dynamique. Expression de la loi de Stokes. Validité du modèle.		
Choix et maîtrise des outils mathématiques	Ecriture du bilan thermique différentiel de l'étape de refroidissement. Signe du transfert par convection. Bilan thermique de l'étape de solidification. Equation différentielle du mouvement de la goutte. Expression de la vitesse limite.		
Savoir réaliser efficacement les calculs analytiques et l'application numérique	Calcul de la durée de formation du flocon et de la durée de chute.		
Faire une analyse critique de la démarche (5 points)			
Critique du modèle	Influence de la valeur du rayon de la goutte. Variation de masse et de volume de la goutte négligées. Influence de la température extérieure.		
Interagir et communiquer (4 points)			
	Clarté de l'exposé.		
	Capacité de réponse aux questions de l'examineur.		
	Capacité d'écoute		
	Capacité d'exploitation des informations et documents.		