

Ascension d'un ballon sonde

Question simple.

Etablir l'expression de la pression en fonction de l'altitude dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme en assimilant l'air à un gaz parfait.

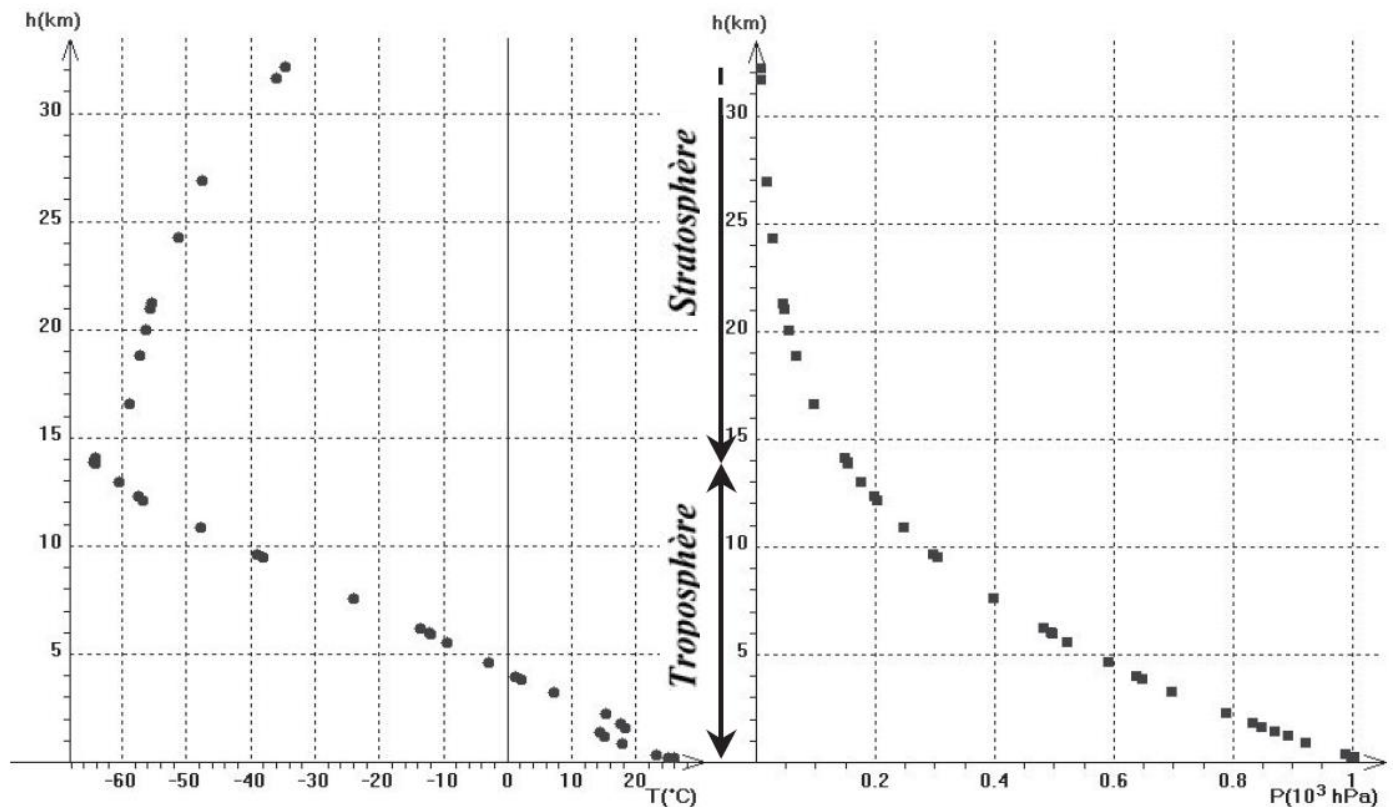
Question ouverte :

Déterminer l'altitude maximale atteinte par un ballon-sonde gonflé à l'hélium.

Le calcul sera réalisé à partir du programme Python fourni sachant que le ballon possède une enveloppe élastique fermée et qu'il a été rempli avec une masse d'hélium m_{He} . Les accessoires solidaires du ballon et sa membrane ont une masse totale constante notée m . Le rayon du ballon varie lors de son ascension et l'élasticité de l'enveloppe s'explique par les propriétés de tension superficielle du matériau qui la constitue. On suppose l'équilibre thermique réalisé entre l'intérieur et l'extérieur du ballon.

Compléter la ligne 59 du script. Interpréter l'origine de la ligne 60. Expliquer le rôle de la fonction `ind_min(liste)`

Le document fourni ci-dessous permettra de valider ou non les hypothèses du modèle choisi pour l'air atmosphérique.



```
# ballon sonde_à compléter.py
```

```
01 import numpy as np
02 import matplotlib.pyplot as plt
03 from math import pi
04
05
06 #Données numériques
07 T0=298      #enK
08 P0=100000   #en Pa
09 g=9.81      #en m.s-2
10 R=8.314     #en J.mol-1.K-1
11
12 Ma=29/1000  #en kg
13 MHe=4/1000  #en kg
14 m=3         # masse des accessoires en kg
15 mHe=0.8     #masse d'Hélium en kg
16 sigma=2100  #tension superficielle en N.m-1
17 z_min=0     #altitude au sol
18 z_max=32000 #altitude maximale de la troposphère
19 L= 0.0065   #gradient de température dans la troposphère en K.m-1
20
21 z=[0]       #valeurs des altitudes en m
22 Pa=[P0]     #valeurs de la P_atmosphérique en Pa
23 T=[T0]      #valeurs de la température atmosphérique en K
24 a=[]        #valeurs du rayon du ballon en m
25 F=[]        #valeurs de la fonction à minimiser à l'altitude maximale du ballon
26
27 def temperature(z):
28     if 0 <= z < 14000:
29         return T0 - L*z
30     elif 14000 <= z < 21000:
31         return 0.001429 * z + 187
32     elif 21000 <= z < 27000:
33         return 0.001333 * z + 189
34     elif 27000 <= z <= 32000:
35         return 0.0026 * z + 154.8
36
37 def ind_min(liste):
38     n=len(liste)
39     index = 0
40     for i in range (n) :
41         if liste[i] < liste[index] :
42             index = i
43     return index
44
45 nb_points=100000
46 dz=(z_max-z_min)/nb_points # choix du pas de variation de l'altitude
47
48 #Modélisation de l'atmosphère
49 i=1
50 while (i<= nb_points):
51     z.append(z_min+i*dz)
52     T.append(temperature(z[i]))
53     Pa.append(Pa[i-1]-Pa[i-1]*Ma*g*dz/(R*T[i-1]))
54     i=i+1
55
56 #Recherche de l'altitude maximale du ballon
57 i=0
58 while (i<= nb_points):
59     a.append(#à compléter)
60     F.append(abs((((m+mHe)/Ma - (mHe/MHe))*R*T[i])+(16*pi*sigma*a[i]**2/3)))
61     i=i+1
62
63 i= ind_min(F)
64
65 #Affichage du résultat
66 print('valeur de l'indice associé au minimum de F = ',i)
67 print('valeur minimale de F ',min(F))
68 print('valeur maximale de l'altitude du ballon = ', z[i], 'm')
69 print('rayon du ballon à l'altitude maximale =', a[i], 'm')
70 print('température à l altitude maximale = ',T[i], 'K')
71 print('pression atmosphérique à l altitude maximale =',Pa[i], 'Pa')
72
73
74
```

Résultat de l'exécution du script :

```
>>> (executing file "ballon sonde.py")
valeur de l'indice associé au minimum de F = 53997
valeur minimale de F 0.10046672022144776
valeur maximale de l'altitude du ballon = 17279.04 m
rayon du ballon à l'altitude maximale = 1.857329027572
134 m
température à l altitude maximale = 211.69174816 K
pression atmosphérique à l altitude maximale = 8592.99
185727292 Pa
```

Source structure

temperature()
ind min()

Corrigé : ballon sonde.

Question simple :

Questions supplémentaires posées au cours de la résolution :

- Démontrer la relation fondamentale de la statique des fluides.
- Faire une analyse dimensionnelle de H la hauteur caractéristique,
- Déterminer la masse molaire de l'air atmosphérique M_{air} à partir de sa composition.
($M_{O_2} = 32 \text{ g.mol}^{-1}$ et $M_{N_2} = 28 \text{ g.mol}^{-1}$)
- Calculer H numériquement à partir de M_{air} .

Question ouverte :

Bilan des forces appliquées au système ballon rempli d'hélium + membrane + accessoires :

- Poids : $(m + m_{He})\vec{g}$
- Poussée d'Archimède en modélisant l'air atmosphérique par un gaz parfait, la température étant fonction de l'altitude (voir lignes 27 à 35 du script et la courbe du document)
): $-m_{air} \text{ déplacé } \vec{g} = -\rho_a(z) \cdot V_{ballon}(z) \cdot \vec{g} = -\frac{M_a P_a(z)}{RT(z)} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot a^3(z) \vec{g}$.
- A l'altitude maximale la résultante des forces appliquées au ballon s'annule ; ce qui s'écrit en projection sur Oz ascendant :
$$-(m + m_{He})g + \frac{M_a P_a(z_{max})}{RT(z)} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot a^3(z_{max})g = 0 \Leftrightarrow -(m + m_{He}) + \frac{M_a P_a(z)}{RT(z)} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot a^3(z_{max}) = 0 \quad (1)$$

Questions posées au cours de la résolution :

- condition pour que le ballon s'élève du sol ?

Projection de la résultante des forces sur Oz > 0 : $-(m + m_{He}) + \frac{M_a P_a(z=0)}{RT(z)} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot a^3(z=0) > 0$.

- Comment varie la poussée d'Archimède en fonction de l'altitude ?

Π diminue si on suppose que le ballon atteint une altitude plafond pour laquelle $\Pi = (m + m_{He})g$.

- Origine physique de la poussée d'Archimède ?

- Comment évolue le rayon du ballon avec la pression atmosphérique ?

Loi de Laplace à l'altitude z : $P_{He}(z) = P_a(z) + \frac{4\gamma}{a(z)} \quad (2)$

$\Rightarrow$ Unité de γ ?

Analyse dimensionnelle $\Rightarrow J \cdot m^{-2} = N \cdot m^{-1}$

$\Rightarrow$ Autre moyen de relier la pression dans le ballon à son rayon ?

Loi des GP à l'altitude $z \Rightarrow P_{He}(z) = \frac{m_{He}RT(z)}{M_{He}\left(\frac{4}{3}\pi \cdot a^3(z)\right)} \quad (3)$

En identifiant (2) et (3) on obtient une expression de la pression atmosphérique P_a en fonction du rayon du ballon : $P_a(z) = \frac{m_{He}RT(z)}{M_{He}\left(\frac{4}{3}\pi \cdot a^3(z)\right)} - \frac{4\gamma}{a(z)}$ que l'on peut identifier pour $z = z_{max}$ à l'expression de $P_a(z_{max})$ issue de (1) :

$$\Leftrightarrow P_a(z_{max}) = \frac{3(m+m_{He})RT}{4M_a\pi \cdot a^3(z_{max})} = \frac{m_{He}RT(z_{max})}{M_{He}\left(\frac{4}{3}\pi \cdot a^3(z_{max})\right)} - \frac{4\gamma}{a(z_{max})} \text{ par identification des deux expressions de } P_a(z_{max}),$$
$$\Rightarrow \frac{3(m+m_{He})RT}{4M_a\pi \cdot a^3(z_{max})} - \frac{m_{He}RT(z_{max})}{M_{He}\left(\frac{4}{3}\pi \cdot a^3(z_{max})\right)} + \frac{4\gamma}{a(z_{max})} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m+m_{He}}{M_a} - \frac{m_{He}}{M_{He}}\right) \cdot RT(z_{max}) + \frac{16\pi\gamma a^2}{3} = 0 \Leftrightarrow F(z_{max}) = 0 \quad (4)$$

Le script Python recherche la valeur de z_{max} vérifiant $F(z_{max})=0$ en construisant une liste des valeurs possibles de z de 0 à 32000 m (fin de la stratosphère) et une liste des valeurs possibles de $F(z)$ données par la formule

précédente. Le calcul des valeurs de F nécessite de construire une liste des valeurs de T et du rayon a du ballon lorsque z varie.

Le script recherche ensuite l'indice i de la liste de F associé la valeur $F(z_{\max})=0$. Ce même indice permet de trouver $z_{\max}$ dans la liste des altitudes z .

Méthode de recherche de l'index i associé à $F(z)=0$:

$F(z)=0 \Leftrightarrow$ valeur absolue de $F(z) = 0 \Leftrightarrow$ **valeur absolue de $F(z)$ minimale** $\Rightarrow$ **il suffit de chercher l'indice i associée à la valeur minimale dans la liste de $\text{abs}(F(z))$** . C'est le rôle de la **fonction $\text{ind_min}(\text{liste})$** (voir lignes 60 à 63 du script.)

Pour construire la liste des valeurs de $\text{abs}(F(z))$, il faut construire une liste des températures, une liste des valeurs de P_a et une liste des valeurs du rayon a , lorsque z varie.

La ligne 59 permet de construire la liste des valeurs des rayons $a(z)$ du ballon en fonction de z :

$\text{a.append}(3*(m+m_{\text{He}})*R*T[i]/(M_a*P_a[i]*4*\pi))^{}(1/3)$** qui provient de l'expression (1) donnant P_a

Critique du modèle :

Le script donne $z_{\max} = 17\,279$ m. $T(z_{\max}) = 211,69$ K soit $-61,3$ °C ; ce qui est en accord avec la courbe du document donnant l'altitude en fonction de la température.

Le script donne $P_a(z_{\max}) = 8593$ Pa en accord également avec la courbe du document reliant altitude et pression atmosphérique.

Question supplémentaire : rôle de la ligne 53 ? Méthode utilisée ?

On reconnaît la **méthode d'Euler** pour intégrer la relation fondamentale de la statique des fluides et obtenir les valeurs de $P_a(z)$.