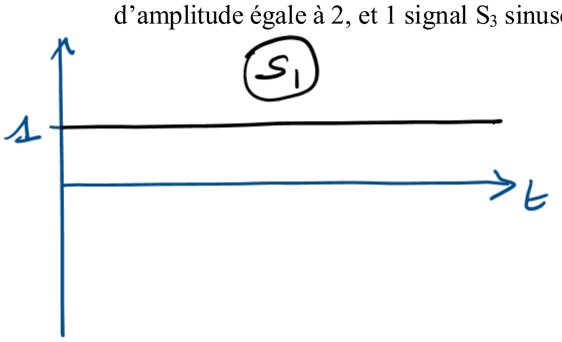
TD Physique n°1 : Filtrage linéaire d'un signal - correction

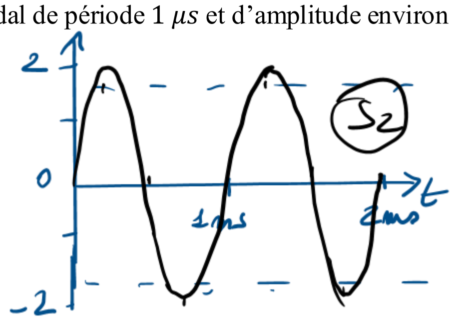
Exercice 1 : Mesure de pression artérielle

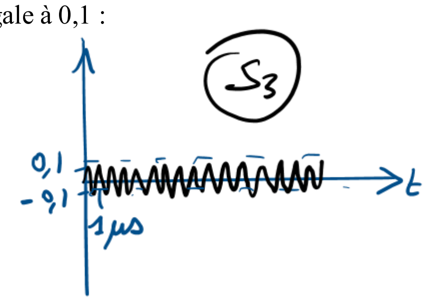
1. La pression artérielle systolique correspond à la pression artérielle maximale mesurée : $\Delta P_{\mathrm{a,sys}} \approx 120\ mmHg$
   La pression artérielle diastolique correspond à la pression artérielle minimale mesurée : $\Delta P_{\mathrm{a,dia}} \approx 80\ mmHg$
2. $\Delta P_{\mathrm{a,moy}} = \frac{\Delta P_{\mathrm{a,sys}} + 2\Delta P_{\mathrm{a,dia}}}{3} = 96\ mmHg$. Sur une période du signal de la mesure de la pression artérielle en fonction du temps ($\approx 1s$), la phase systolique dure approximativement deux fois moins de temps que la phase diastolique, ce qui justifie la formule utilisée pour déterminer la pression artérielle moyenne.
3. $f = \frac{1}{T}$ avec $T \approx 1\ s$ (par battement), on en déduit $f \approx 1\ battements \cdot s^{-1} = 60\ battements \cdot min^{-1}$.
4. $D_V = \frac{V_1}{\Delta t_{battement}} = \frac{V_1}{\mathrm{T}} = V_1 \times f \Rightarrow V_1 = \frac{D_V}{f}$ l'AN donne : $V_1 = \frac{5,0}{60} = 8,3 \times 10^{-2}\ L = 83\ mL$
5. Si le spectre de la pression artérielle ne contenait pas d'harmonique, le signal de la mesure de la pression artérielle en fonction du temps serait une constante (correspondante à la valeur moyenne). Par conséquent le spectre contient des harmoniques.
6. Si l'on désire déterminer la pression artérielle moyenne (fréquence nulle), il faut supprimer tous les harmoniques donc appliquer un filtre passe-bas. Il faudrait une fréquence de coupure (si l'on suppose le filtre idéal) comprise entre 0 Hz et la fréquence du fondamental (ou harmonique de rang 1) soit 1 Hz.

Exercice 2 : Filtrage d'un signal

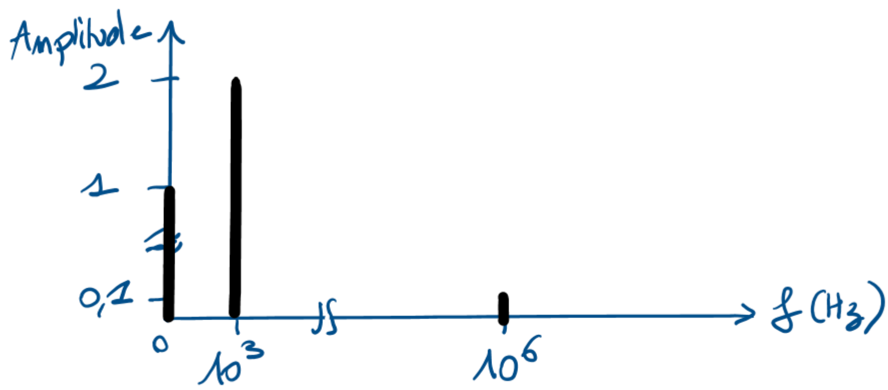
1. Ce signal est la somme de trois signaux, un signal S_1 de valeur constante égale à 1, un signal S_2 sinusoïdal de période 1 ms et d'amplitude égale à 2, et 1 signal S_3 sinusoïdal de période 1 μs et d'amplitude environ égale à 0,1 :



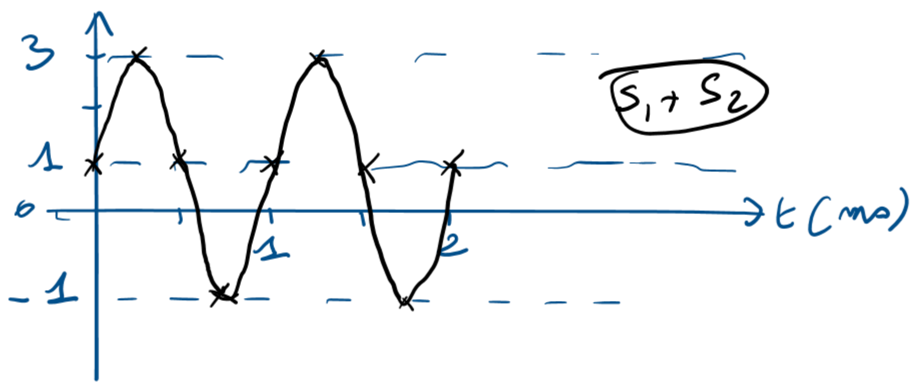




Le spectre de ce signal est donc le suivant :



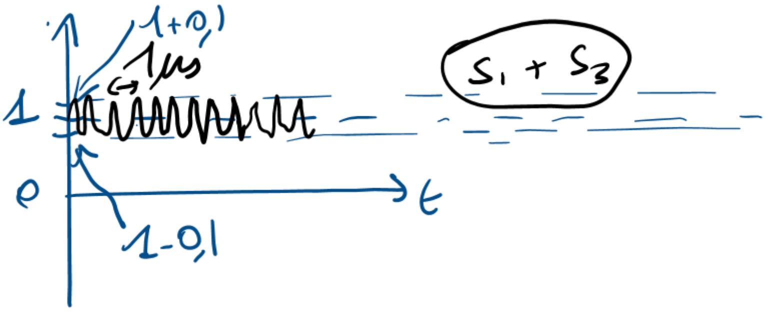
2. A la sortie du **filtre passe-bas de fréquence de coupure 10 kHz**, le signal S_3 est coupé. En sortie de filtre, on obtient un signal somme des signaux S_1 et S_2 (si les amplitudes ne sont pas modifiées) :



A la sortie du **filtre passe-haut de fréquence de coupure 10 kHz**, les signaux S_1 et S_2 sont coupés. En sortie de filtre, on obtient le **signal S_3** (si les amplitudes ne sont pas modifiées)

A la sortie du **filtre passe-bande de fréquence centrale 1,0 kHz bande-passante 100 Hz**, les signaux S_1 et S_3 sont coupés. En sortie de filtre, on obtient le **signal S_2** (si les amplitudes ne sont pas modifiées) :

A la sortie du **filtre coupe-bande de fréquence centrale 1,0 kHz bande-passante 100 Hz**, le signal S_2 est coupé. En sortie de filtre, on obtient un signal somme des signaux S_1 et S_3 (si les amplitudes ne sont pas modifiées) :

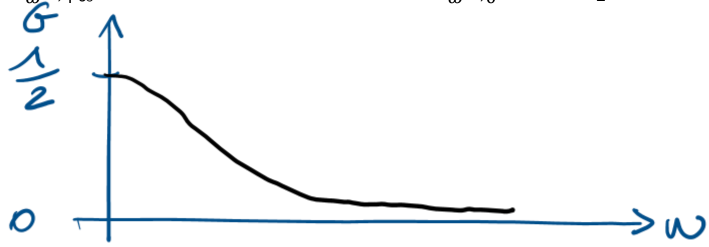


Exercice 3 : Etude d'un filtre d'ordre 1 – application à la transmission d'un signal

1. **a.** RSF ⟶ complexes
   LDM : $\underline{e} = R\underline{i} + \underline{s}$
   LDN : $\underline{i} = \underline{i_1} + \underline{i_2} \quad \Longrightarrow \underline{e} = R\underline{i_1} + R\underline{i_2} + \underline{s}$
   Loi sur R : $\underline{s} = R\underline{i_1}$
   Loi sur C : $\underline{i_2} = jC\omega\underline{s} \Longrightarrow \underline{e} = \underline{s} + jRC\omega\underline{s} + \underline{s}$
   $\Longrightarrow \underline{e} = (2 + jRC\omega)\underline{s} \Longrightarrow \underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{1}{2 + jRC\omega}$

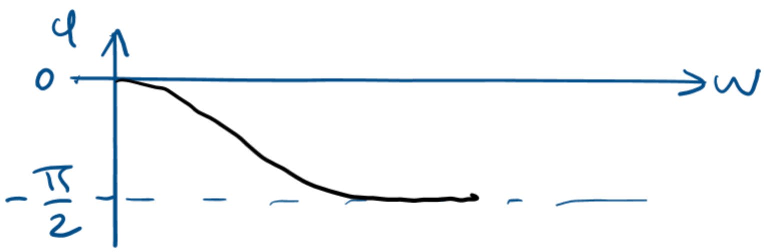
   b. $G = \left[\underline{H}\right] = \left[\frac{1}{2+jRC\omega}\right] = \frac{[1]}{[2+jRC\omega]} = \frac{1}{\sqrt{4+(RC\omega)^2}}$

   $\lim\limits_{\omega\to+\infty} G(\omega) = 0$ et $\lim\limits_{\omega\to0} G(\omega) = \frac{1}{2}$: filtre passe-bas avec $G_{max} = \frac{1}{2}$



   $\varphi = arg(\underline{H}) = arg\left(\dfrac{1}{2+jRC\omega}\right) = \arg(1) - \arg(2 + jRC\omega) = 0 - \arctan\left(\dfrac{RC\omega}{2}\right) = -\arctan\left(\dfrac{RC\omega}{2}\right)$

   $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{\omega\to0} \varphi(\omega) = 0$



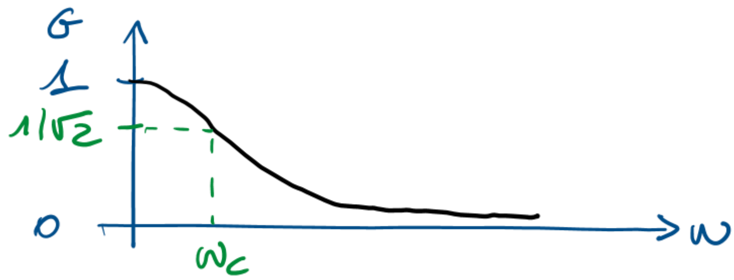
   c. $G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{4+(RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow 4 + (RC\omega_c)^2 = 8 \Longrightarrow (RC\omega_c)^2 = 4 \Longrightarrow RC\omega_c = 2 \Longrightarrow \omega_c = \frac{2}{RC}$

   Filtre passe-bas ⟹ bande-passante en pulsation : $\left[0; \frac{2}{RC}\right]$

2. Si le filtre est idéal, les composantes d'entrée $\frac{E_m}{3^2}\cos(3\omega_0 t)$ et $\frac{E_m}{5^2}\cos(3\omega_0 t)$ sont coupées par le filtre. En sortie du filtre, seule la composantes $E_m\cos(\omega_0 t)$ est donc conservée. Si on considère que les amplitudes ne sont pas modifiées (filtre idéal), le signal en sortie attendue est donc : $E_m\cos(\omega_0 t)$.

Exercice 4 : Filtre RC en cascade

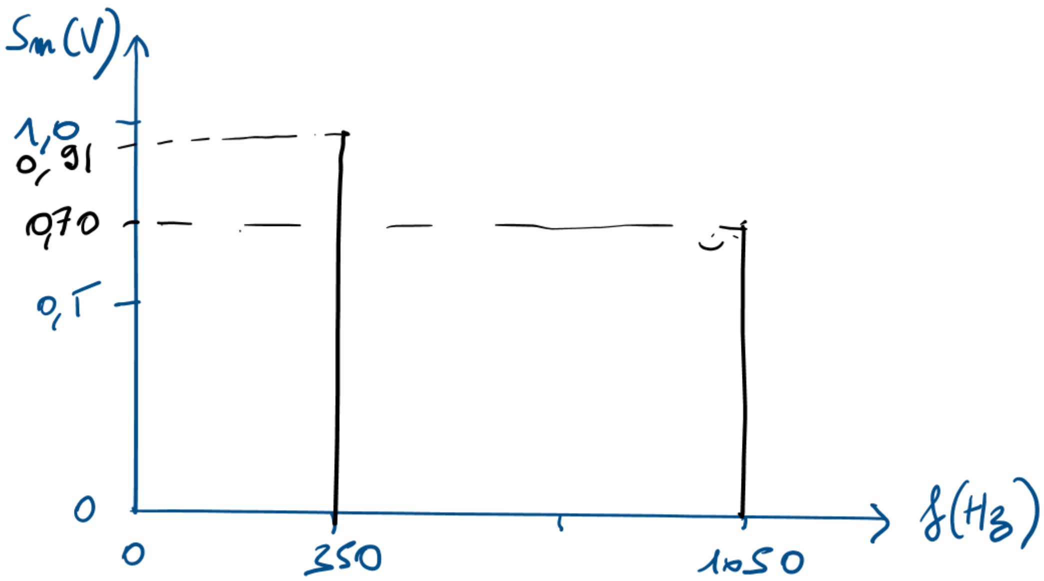
1. $G = |\underline{H}| = \left|\frac{1}{1-R^2C^2\omega^2+j3RC\omega}\right| = \frac{|1|}{|1-R^2C^2\omega^2+j3RC\omega|} = \frac{1}{\sqrt{(1-R^2C^2\omega^2)^2+(3RC\omega)^2}}$
   $\lim_{\omega\to+\infty} G(\omega) = 0$ et $\lim_{\omega\to 0} G(\omega) = 1$: filtre passe-bas avec $G_{max} = 1$



2. On reconnait l'allure de la réponse en gain pour un filtre passe-bas.
   $G(f_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7 \Longrightarrow$ par lecture graphique : $f_c \approx 0{,}6\ Hz$
   Filtre passe-bas $\Longrightarrow$ bande-passante en fréquence (Hz) : [0; 0,6]

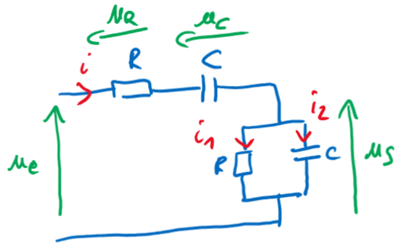
Exercice 5 : Filtre réjecteur de fréquence (ou coupe-bande)

1. $G = |\underline{H}| = \left|\frac{1-x^2}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}\right| = \frac{|1-x^2|}{\left|1-x^2+j\frac{x}{Q}\right|} = \frac{|1-x^2|}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$
2. $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$; $\lim_{x\to 0} G(x) = 1$ et par ailleurs, on remarque que $G(x=1) = 0$
   Ce filtre laisse donc passer les basses et les hautes fréquences tout en rejetant la fréquence $f = f_0$, d'où le nom donné au filtre
3. $G(x_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
   Par lecture graphique : $x_{c1} = 0{,}80$ et $x_{c2} = 1{,}25$
   En fréquence : $f_{c1} = x_{c1} \times f_0 = 570\ Hz$ $f_{c2} = x_{c2} \times f_0 = 890\ Hz$
4. Le signal périodique d'entrée peut se décomposer sous la forme (décomposition de Fourier) :
   $e(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t)$ avec
   $e_1(t) = E_{m1}\cos(2\pi f_1 t + \varphi_{e1})$ où $f_1 = 350\ Hz$ et $E_{m1} = 1{,}0\ V$ (fondamental = harmonique de rang 1)
   $e_2(t) = E_{m2}\cos(2\pi f_2 t + \varphi_{e2})$ où $f_2 = 2f_1 = 700\ Hz$ et $E_{m2} = 0{,}1\ V$ (harmonique de rang 2)
   $e_3(t) = E_{m3}\cos(2\pi f_3 t + \varphi_{e3})$ où $f_3 = 3f_1 = 1050\ Hz$ et $E_{m3} = 0{,}8\ V$ (harmonique de rang 3)
   Le signal de sortie sera sous la forme : $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$
   $s(t) = S_{m1}\cos(2\pi f_1 t + \varphi_{s1})$ où $f_1 = 350\ Hz$
   $s_2(t) = S_{m2}\cos(2\pi f_2 t + \varphi_{s2})$ où $f_2 = 2f_1 = 700\ Hz$
   $s_3(t) = S_{m3}\cos(2\pi f_3 t + \varphi_{s3})$ où $f_3 = 3f_1 = 1050\ Hz$
   Pour déterminer le spectre en fréquence du signal en sortie, on va calculer les amplitudes de sortie, S_{m1}, S_{m2} et S_{m3}, en appliquant la formules du gain aux fréquences correspondantes :
   $S_{m1} = E_{m1} \times G(x_1)$ avec $x_1 = \frac{f_1}{f_0} = 0{,}49$ Par lecture graphique : $G(x_1) = 0{,}91$ $\Longrightarrow S_{m1} = 0{,}91\ V$
   $S_{m2} = E_{m2} \times G(x_2)$ avec $x_2 = \frac{f_2}{f_0} = 0{,}98$ Par lecture graphique : $G(x_2) = 0$ $\Longrightarrow S_{m2} = 0{,}0\ V$
   $S_{m3} = E_{m3} \times G(x_3)$ avec $x_3 = \frac{f_3}{f_0} = 1{,}47$ Par lecture graphique : $G(x_3) = 0{,}87$ $\Longrightarrow S_{m3} = 0{,}70\ V$
   Spectre du signal de sortie :



1.

1.



LDM : $u_e = u_R + u_c + u_s$

Loi sur R : $u_e = Ri + u_c + u_s$

Loi sur C : $u_e = RC\frac{du_c}{dt} + u_c + u_s$

$\Rightarrow \underline{u_e} = jRC\omega\,\underline{u_c} + \underline{u_c} + \underline{u_s}$

RSF $\underline{u_e} = (1+jRC\omega)\,\underline{u_c} + \underline{u_s}$ ①

?

Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$

Loi sur R et C : $C\frac{du_c}{dt} = \frac{u_s}{R} + C\frac{du_s}{dt}$ $\underset{RSF}{\Rightarrow}$ $jC\omega\,\underline{u_c} = \frac{\underline{u_s}}{R} + jC\omega\,\underline{u_s}$

$\Rightarrow \underline{u_c} = \underline{u_s} \times \left[\frac{1}{jRC\omega} + 1\right]$ ②

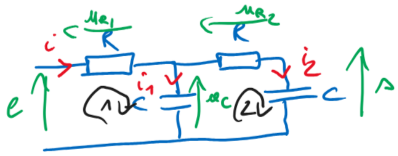
①,② $\Rightarrow$ $\underline{u_e} = (1+jRC\omega)\times\left(1+\frac{1}{jRC\omega}\right)\underline{u_s} + \underline{u_s}$

$\Rightarrow \underline{u_e} = \left(1 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega} + 1\right)\underline{u_s} + \underline{u_s} = \left(2 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)\right)\underline{u_s} + \underline{u_s}$

$\Rightarrow \underline{u_e} = \left(3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)\underline{u_s}$ $\quad (x = RC\omega)$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

2.



LDM$_1$: $e = u_{R_1} + u_c$

LDM$_2$: $u_c = u_{R_2} + s$ ①

$\Rightarrow e = u_{R_1} + u_{R_2} + s$

Loi sur R : $e = Ri + Ri_2 + s$? ?

Loi sur C : $e = Ri + RC\frac{ds}{dt} + s$ $\underset{RSF}{\Rightarrow}$ $\underline{e} = R\underline{i} + jRC\omega\,\underline{s} + \underline{s}$ ② ?

Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$

Loi sur R et C : $i = C\frac{du_c}{dt} + C\frac{ds}{dt}$ $\underset{RSF}{\Rightarrow}$ $\underline{i} = jC\omega\,\underline{u_c} + jC\omega\,\underline{s}$ ③

②,③ : $\underline{e} = R\left[jC\omega\,\underline{u_c} + jC\omega\,\underline{s}\right] + jRC\omega\,\underline{s} + \underline{s}$ ④ ?

① $\Rightarrow u_c = u_{R_2} + s = Ri_2 + s = RC\frac{ds}{dt} + s$ $\underset{RSF}{\Rightarrow}$ $\underline{u_c} = jRC\omega\,\underline{s} + \underline{s}$ ⑤

④,⑤ $\Rightarrow$ $\underline{e} = R\left[jC\omega \times (jRC\omega\,\underline{s} + \underline{s}) + jC\omega\,\underline{s}\right] + jRC\omega\,\underline{s} + \underline{s}$

$\underline{e} = \underline{s}\left[1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2\right]$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 - (RC\omega)^2 + 3jRC\omega}}$$