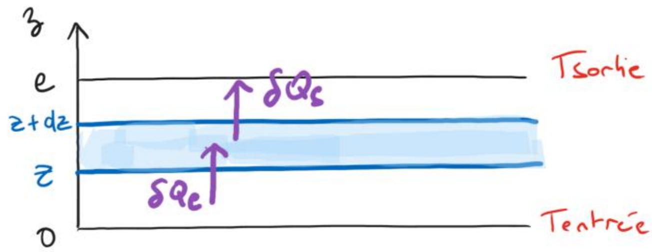
TD Physique n°4 : Phénomènes de transport – Conduction thermique - Correction

Exercice 1 : La température du mouton

1. **Système** : tranche d'épaisseur comprise entre z et z+dz, étudiée entre t et t+dt



Bilan d'énergie : transformation monobare ($P_i = P_f = P_{ext} = cste$) $\Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s$

En régime stationnaire : $dH = 0 \Longrightarrow \delta Q_e - \delta Q_s = 0 \Longrightarrow \delta Q_e = \delta Q_s$

$\delta Q_e = \Phi_{th}(z)dt$ et $\delta Q_s = \Phi_{th}(z+dz)dt$ $\Longrightarrow \Phi_{th}(z)dt = \Phi_{th}(z+dz)dt \Longrightarrow \Phi_{th}(z) = \Phi_{th}(z+dz)$

$\Longrightarrow \Phi_{th} = cst$: le flux se conserve

Loi de Fourier : $\Phi_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} S$

$$\Longrightarrow dT = -\frac{\Phi_{th}}{\lambda S} dz \Longrightarrow \int_{T_{entrée}}^{T_{sortie}} dT = -\frac{\Phi_{th}}{\lambda S}\int_0^e dx \Longrightarrow (T_{sortie} - T_{entrée}) = -\frac{\Phi_{th}}{\lambda S} \times e$$

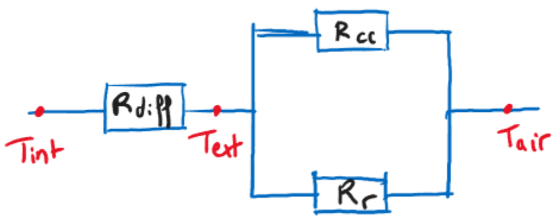
$$\boldsymbol{R_{th}} = \frac{T_{amont} - T_{aval}}{\Phi_{th}} = \frac{T_{entrée} - T_{sortie}}{\Phi_{th}} = \frac{e}{\lambda S} = \boldsymbol{\frac{e}{\lambda HL}}$$

2. Les 6 faces sont en // : $\frac{1}{R_{diff}} = \frac{4}{R_{dos}} + \frac{2}{R_{avant}} \Longrightarrow R_{diff} = \frac{1}{\frac{4}{R_{dos}} + \frac{2}{R_{avant}}}$

avec $R_{dos} = \frac{e}{\lambda_{laine} HL}$ $(S = HL)$ et $R_{avant} = \frac{e}{\lambda_{laine} H^2}$ $(S = H^2)$

AN : $\boldsymbol{R_{diff\,m}} = 0{,}9\ \boldsymbol{K \cdot W^{-1}}$ $\boldsymbol{R_{diff\,M}} = 1{,}8\ \boldsymbol{K \cdot W^{-1}}$

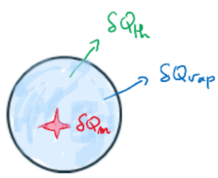
3. **Schéma électrique équivalent** :



La résistance équivalente s'écrit alors : $R_{eq} = \frac{T_{int} - T_{air}}{\Phi_{th}} = R_{diff} + \frac{R_{cc} R_r}{R_{cc} + R_r}$ avec $\Phi_{th} = \Phi_{diff}$

AN : $\boldsymbol{R_1} = 1{,}9\ \boldsymbol{K \cdot W^{-1}}$ $\boldsymbol{R_2} = 0{,}17\ \boldsymbol{K \cdot W^{-1}}$

4. **Système** : brebis



Transformation monobare $\Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_{reçu} - \delta Q_{perdu} = \delta Q_m - (\delta Q_{th} + \delta Q_{vap})$

Attention : ici tous les transferts thermiques sont comptés positivement

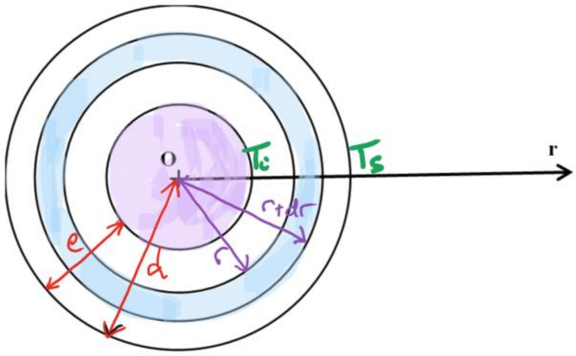
Régime stationnaire : $dH = 0 \Longrightarrow \delta Q_m = \delta Q_{th} + \delta Q_{vap}$

$\Longrightarrow p_{m0} = \Phi_{th} + \Phi_{vap} \Longrightarrow p_{m0} = \frac{T_{int} - T_{air}}{R_1} + m \times \Delta H^0_{vap}$ $AN :\ p_{m0} = 18\ W$

5. $p'_{m0} = \frac{T_{int} - T_{air}}{R_2} + m' \times \Delta H^0_{vap}$ $AN :\ p'_{m0} = 200\ W$

Exercice 2 : Mise en chambre d'un vin en bouteille

1. **Système :** coquille cylindrique comprise entre deux cylindres de rayons r et $r + dr$ où $d - e \leq r \leq d$, étudiée entre les instants t et $t + dt$



En régime stationnaire et en l'absence de sources internes ou de pertes thermiques autres que par conduction thermique, le flux conductif se conserve : $\boldsymbol{\Phi_{cond} = cst}$

Loi de Fourier : $\Phi_{cond} = -\lambda S \frac{dT}{dr} = -\lambda \times 2\pi r H \times \frac{dT}{dr}$

Φ_{th} étant constant (en notant T_i est la température à l'intérieur de la bouteille)

$\Rightarrow R_{cond} = \frac{T_{amont} - T_{aval}}{\Phi_{cond}} = \frac{T_i - T_S}{\Phi_{cond}} \Rightarrow R_{cond} = \frac{1}{2\pi\lambda H} \times ln\left(\frac{d}{d-2e}\right)$ (>0)

$\Rightarrow R_{cond} = 7{,}7 \times 10^{-2}\ K \cdot W^{-1}$

2. $\Phi_{conv} = \frac{T_{amont} - T_{aval}}{R_{conv}} \Rightarrow hS(T_S - T_A) = \frac{T_S - T_A}{R_{conv}} \Rightarrow R_{conv} = \frac{1}{hS} = \frac{1}{h \times \pi \times d \times H}$ (>0)

   h s'exprime en $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$

   AN : $R_{conv} = 2{,}0 \times 10^{-2}\ K \cdot W^{-1}$

3. Les résistances conductives et convectives étant en série : $R_{th} = R_{cond} + R_{conv} = 9{,}7 \times 10^{-2}\ K \cdot W^{-1}$

4. **Système** : vin dans la bouteille, étudié entre les instants t et $t + dt$

   Bilan d'énergie (monobare : $\boldsymbol{P_{ext} = cste}$) : $dH = \delta Q = -\Phi dt$ avec $\Phi = \Phi_{cond} = \Phi_{conv}$ (série donc même flux)

   avec : $\Phi = \frac{T - T_A}{R_{th}}$ où T est la température du système et $dH = CdT = mcdT$

$$\Rightarrow mcdT = -\frac{T - T_A}{R_{th}} dt \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{mcR_{th}} T = \frac{1}{mcR_{th}} T_A$$

5. Solution générale de l'équation différentielle : $T(t) = k \times e^{-\frac{t}{\tau}} + T_A$ avec : $\tau = mcR_{th}$

   Condition initiale : $T(t = 0) = k + T_A = T_0 \Rightarrow k = T_0 - T_A$

   Bilan : $T(t) = (T_0 - T_A) \times e^{-\frac{t}{\tau}} + T_A$

$$T(t = t_D) = T_D = (T_0 - T_A) \times e^{-\frac{t_D}{\tau}} + T_A \Rightarrow e^{-\frac{t_D}{\tau}} = \frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}$$

$$\Rightarrow t_D = -\tau \times ln\left(\frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}\right) = -\tau \times ln\left(\frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}\right) = mcR_{th} \times ln\left(\frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}\right)$$

$$= \rho \times \pi \times \left(\frac{d}{2} - e\right)^2 \times H \times R_{th} \times ln\left(\frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}\right)$$

$AN : t_D = 334\ s$

Exercice 3 : Epaisseur de la croûte d'une comète

1. La quantité de chaleur reçue pendant Δt par la surface du cœur de la comète vaut : $\phi_{com}\Delta t$

Cette énergie thermique permet la sublimation de la glace : $\phi_{com}\Delta t = n_{glace}L_{sub} = \frac{m_{glace}}{M_{glace}}L_{sub}$

Par analyse dimensionnelle : $\phi_{com} = j_{com} \times S_{com} = j_{com} \times 4\pi r_{com}^2$

On obtient donc : $j_{com} \times 4\pi r_{com}^2 \times \Delta t = \frac{m_{glace}}{M_{glace}}L_{sub} \Longrightarrow \boldsymbol{m_{glace}} = \frac{\boldsymbol{j_{com} \times 4\pi r_{com}^2 \times \Delta t \times M_{glace}}}{\boldsymbol{L_{sub}}} \Longrightarrow \boldsymbol{m_{glace}} = 431\ \boldsymbol{kg}$

2. En absence de sources internes (énergie apportée ou perdue) et en régime stationnaire, le flux se conserve.

3. Loi de Fourier (symétrie sphérique) : $\Phi_{th} = -\lambda S\frac{dT}{dr} = -\lambda 4\pi\lambda r^2\frac{dT}{dr}$ avec $\Phi_{th} = -\phi_{com}$ (car ϕ_{com} est orientée de l'extérieur de la comète vers l'intérieur, tandis que Φ_{th} est orienté dans le sens des r croissants donc de l'intérieur vers l'extérieur de la comète).

On obtient : $\boldsymbol{dT} = +\frac{\boldsymbol{\phi_{com}}}{\boldsymbol{4\pi\lambda r^2}}\boldsymbol{dr}$

4. $\int_{T_0}^{T} dT = \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda}\int_{r_{com}}^{r}\frac{dr}{r^2}$ $\qquad$ ϕ_{com} étant constant

Ce qui donne : $T - T_0 = \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda} \times \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{com}}\right) \Longrightarrow \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T_0} + \frac{\boldsymbol{\phi_{com}}}{\boldsymbol{4\pi\lambda}} \times \left(-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r_{com}}}\right)$

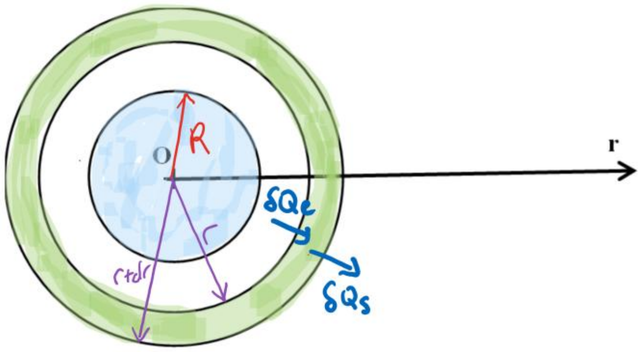
5. Pour $r = r_{com} - e$: $\qquad$ $T = T_1$

On obtient donc :

$T_1 = T_0 + \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda} \times \frac{-e}{(r_{com}-e)\times r_{com}} \approx T_0 - \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda} \times \frac{e}{{r_{com}}^2}$ $\qquad$ si $e \ll r_{com}$

$$\Longrightarrow e = \frac{(T_0 - T_1) \times 4\pi\lambda {r_{com}}^2}{\phi_{com}} = \frac{(T_0 - T_1) \times 4\pi\lambda {r_{com}}^2}{\phi_{com}} \Longrightarrow \boldsymbol{e} = \frac{(\boldsymbol{T_0} - \boldsymbol{T_1}) \times \boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{j_{com}}} \Longrightarrow \boldsymbol{e} = 51 \times 10^{-2}\boldsymbol{m} = 51\boldsymbol{cm}$$

Exercice 4 : Température cutanée d'un mammifère



1. $\phi = \varphi_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3$

2. **Système d'étude :** Système d'étude : coquille sphérique comprise entre r et $r + dr$, entre les instants t et $t + dt$
Quantité de chaleur algébrique entrante en r par conduction thermique : $\delta Q_e = \Phi(r)dt$
Quantité de chaleur algébrique sortante en r+dr par conduction thermique : $\delta Q_s = \Phi(r + dr)dt$
Bilan d'énergie en régime stationnaire : $P_{ext} = cst \Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s$

En régime stationnaire : $dH = 0 \Rightarrow \delta Q_e = \delta Q_s \Rightarrow \Phi(r) = \Phi(r + dr) \Longrightarrow \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{cste}$ **: le flux se conserve**

3. **Loi de Fourier :** $\phi = -\lambda S\frac{dT}{dr} = -\lambda 4\pi r^2\frac{dT}{dr} = cste = \varphi_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\Rightarrow r^2\frac{dT}{dr} = -\varphi_0 \times \frac{1}{3\lambda}R^3 \Rightarrow \int_{T(r)}^{T_0} dT = -\frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda}\int_r^{+\infty}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow T_0 - T(r) = -\frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda} \times \left[-\frac{1}{r}\right]_r^{+\infty} = -\frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda} \times \frac{1}{r} \Rightarrow \boldsymbol{T(r) = T_0 + \frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda} \times \frac{1}{r}}$$

4. $T(r = R) = T_C \Rightarrow \boldsymbol{T_C = T_0 + \frac{\varphi_0 R^2}{3\lambda}}$
5. $T_C = T_0 + \frac{\varphi_0 R^2}{3\lambda} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{3\lambda \times (T_C - T_0)}{R^2}}$

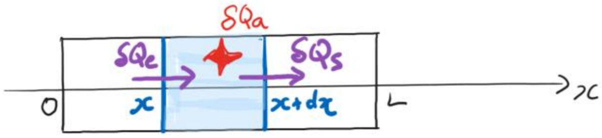
AN : $\varphi_{0,eau} = 2{,}4 \times 10^5\ W.m^{-3}$ $\varphi_{0,air} = 2{,}4 \times 10^3\ W.m^{-3}$

Exercice 5 : Etude d'un fusible en régime permanent

1. **a**. La puissance électrique reçue par le fil est : $P = \mathrm{R} \times \boldsymbol{I}^2 = \frac{L}{\sigma S}\boldsymbol{I}^2$

   b. La puissance électrique reçue par une tranche d'épaisseur dx du fil électrique : $\boldsymbol{P_{dx} = R_{dx} \times I^2 = \frac{dx}{\sigma S}I^2}$

2. **a.** Système d'étude : tranche d'épaisseur dx, comprise entre x et $x + dx$, entre les instants t et $t + dt$



Bilan d'énergie sur une tranche d'épaisseur dx : $P_{ext} = cst \Rightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e + \delta Q_a - \delta Q_s$

En régime stationnaire : $dH = 0 \Rightarrow \delta Q_e + \delta Q_a = \delta Q_s \Rightarrow \delta Q_e + \delta Q_a = \delta Q_s$

où : δQ_e : quantité de chaleur entrante (algébrique) par conduction thermique
δQ_s : quantité de chaleur sortante (algébrique) par conduction thermique
δQ_a : quantité de chaleur apportée par effet joule

$$\Rightarrow \Phi_{th,e}dt + \frac{dx}{\sigma S}I^2 dt = \Phi_{th,s}dt \Rightarrow \Phi_{th}(x)dt + \frac{dx}{\sigma S}I^2 dt = \Phi_{th}(x + dx)dt \Rightarrow \Phi_{th}(x) + \frac{dx}{\sigma S}I^2 = \Phi_{th}(x + dx$$

$$\Rightarrow \Phi_{th}(x + dx) - \Phi_{th}(x) = \frac{dx}{\sigma S}I^2 \Rightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx}dx = \frac{dx}{\sigma S}I^2 \Rightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx} = \frac{I^2}{\sigma S}$$

Loi de Fourier : $\Phi_{th} = -\lambda\frac{dT}{dx}S \Rightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx} = -\lambda S\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{I^2}{\sigma S}$

L'équation différentielle s'écrit donc : $\boldsymbol{\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\lambda\sigma S^2}}$

b. $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\lambda\sigma S^2} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{I^2}{\lambda\sigma S^2}x + a \Rightarrow T = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}x^2 + ax + b$

Conditions aux limites : $T(x = 0) = T_0 \Rightarrow b = T_0$

$$T(x = L) = T_0 \Rightarrow -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L^2 + aL + T_0 = T_0 \Rightarrow -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L^2 + aL = 0 \Rightarrow a = \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L$$

Bilan : $\boldsymbol{T = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}x^2 + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}Lx + T_0}$

c. L'intensité maximale du fusible est atteinte lorsque la température maximale T_{max} est égale à la température de fusion du plomb.

Recherche de la température maximale T_{max} du fil :

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{I^2}{\lambda\sigma S^2}x + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

$$\boldsymbol{T_{max}} = T\left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L\left(\frac{L}{2}\right) + T_0 = \boldsymbol{\frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma S^2} + T_0}$$

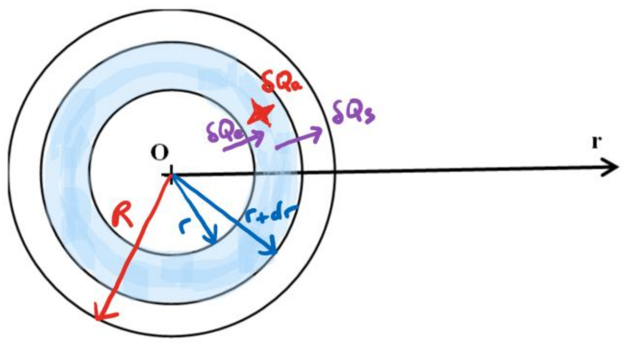
$$T_{max} = T_{fus} \Rightarrow \frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma S^2} + T_0 = T_{fus} \Rightarrow \frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma S^2} = T_{fus} - T_0 \Rightarrow S^2 = \frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma \times (T_{fus} - T_0)} \Rightarrow S = \left(\frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma \times (T_{fus} - T_0)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Or : $S = \pi a^2$

Donc : $\pi a^2 = \frac{IL}{\sqrt{8\lambda\sigma\times(T_{fus}-T_0)}} \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{IL})^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\left(8\lambda\sigma\times(\boldsymbol{T_{fus}}-\boldsymbol{T_0})\right)^{\frac{1}{4}}}$ AN : $\boldsymbol{a} = 9{,}2 \times 10^{-4}\boldsymbol{m} = 0{,}92\ \boldsymbol{m}$

Exercice 6 : Réacteur nucléaire

1. **Schéma (vue de dessus) :**



- **Système d'étude :** coquille cylindrique comprise entre deux cylindres de rayons r et r + dr (r<R), de hauteur L, entre les instants t et t + dt

- **Quantité de chaleur algébrique entrante en r par conduction thermique** : $\delta Q_e = \Phi_{th}(r)dt$
  Quantité de chaleur algébrique sortante en r+de par conduction thermique : $\delta Q_s = \Phi_{th}(r+dr)dt$
  Quantité de chaleur apportée par la réaction nucléaire : $\delta Q_a = \varphi dV dt = \varphi 2\pi r L dr dt$

- **Bilan d'énergie en régime stationnaire :**

  $P_{ext} = cst \Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e + \delta Q_a - \delta Q_s$

  En régime stationnaire : $dH = 0 \Rightarrow \delta Q_e + \delta Q_a = \delta Q_s$

- **Equation différentielle en $\boldsymbol{\Phi_{th}}$** :
  $\Longrightarrow \Phi_{th}(r) + \varphi dV = \Phi_{th}(r+dr) \Longrightarrow \Phi_{th}(r) + \varphi 2\pi r L dr = \Phi_{th}(r+dr)$
  $\Longrightarrow \varphi 2\pi r L dr = \Phi_{th}(r+dr) - \Phi_{th}(r) \Longrightarrow \varphi 2\pi r L dr = d\Phi_{th} \Longrightarrow \frac{\boldsymbol{d\Phi_{th}}}{\boldsymbol{dr}} = \boldsymbol{\varphi 2\pi r L}$ (1)

- **Loi de Fourier :** $\Phi_{th} = -\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dr}$

- **Equation différentielle en $\boldsymbol{T}$:**

  L'équation (1) devient alors : $\frac{d\Phi_{th}}{dr} = \varphi 2\pi r L \Longrightarrow \frac{d\left(-\lambda 2\pi r L\frac{dT}{dr}\right)}{dr} = \varphi 2\pi r L \Longrightarrow -\lambda 2\pi L \frac{d\left(r\frac{dT}{dr}\right)}{dr} = \varphi 2\pi r L \Longrightarrow \frac{d\left(r\frac{dT}{dr}\right)}{dr} = -\frac{\varphi r}{\lambda}$

  En primitivant : $r\frac{dT}{dr} = -\frac{\varphi r^2}{2\lambda} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{dr}} = -\frac{\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{2\lambda}}\boldsymbol{r}$

2. On a : $T(R) = T_e$

   En séparant les variables et en intégrant en r quelconque et R, on trouve :
   $$T(r) - T_e = -\frac{\varphi}{4\lambda}(r^2 - R^2) \Rightarrow \boldsymbol{T(r)} = \boldsymbol{T_e} - \frac{\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{4\lambda}}(\boldsymbol{r^2} - \boldsymbol{R^2})$$

3. **Pour $\boldsymbol{T = T_{max}}$,** $\frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{dr}} = -\frac{\varphi}{2\lambda}r = 0 \Longrightarrow r = 0$

   On obtient :$\boldsymbol{T_{max}} = \boldsymbol{T(r} = 0) = \boldsymbol{T_e} + \frac{\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{4\lambda}}\boldsymbol{R^2}$

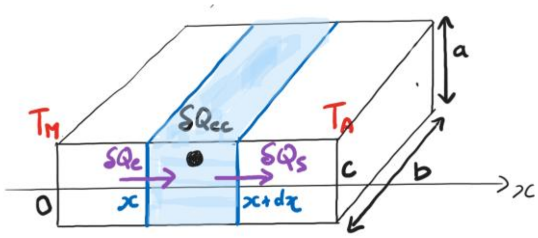
4. **Pour $\boldsymbol{R = R_{lim}}$:** $T_{max} = T_f \Rightarrow T_f = T_e + \frac{\varphi}{4\lambda}R_{lim}^2 \Longrightarrow \boldsymbol{R_{lim}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{4\lambda}}{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{T_f} - \boldsymbol{T_e})}$

   L'A.N. donne : $\boldsymbol{R_{lim}} = 1{,}2\ \boldsymbol{cm}$. La valeur de 1,0 cm est bien choisie car la fusion du crayon n'intervient pas.

Modélisation du manche par un parallélépipède rectangle :

épaisseur a, largeur b, section $S = ab$ et longueur c, avec $c \gg b \gg a$

Système d'étude : tranche d'épaisseur dx, comprise entre x et $x + dx$, entre les instants t et $t + dt$



en prenant $\boldsymbol{T_M = 373\ K}$ et $\boldsymbol{T_A = 298\ K}$

Evolution monobare avec $P_i = P_f = P_{ext} = cst \Longrightarrow dH = H(t + dt) - H(t) = \delta Q_e - \delta Q_s - \delta Q_{cc}$

En régime stationnaire : $dH = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\delta Q_e - \delta Q_s - \delta Q_{cc} = 0}$

avec : δQ_e : transfert thermique reçu (algébrique) par conduction thermique à travers $S = ab$
δQ_s : transfert thermique évacué (algébrique) par conduction thermique à travers $S = ab$
δQ_{cc} : quantité de chaleur perdue par transfert conducto-convectif au niveau de la surface latérale $S_{lat} = 2(a + b)dx \approx 2bdx$

$\delta Q_e = \Phi_{th}(x)dt$ $\qquad$ $\delta Q_s = \Phi_{th}(x + dx)dt$ $\qquad$ $\delta Q_{cc} = hS_{lat} \times (T - T_A)dt = 2hbdx \times (T - T_A)dt$

$$\Longrightarrow \Phi_{th}(x)dt = \Phi_{th}(x + dx)dt + 2hbdx \times (T - T_A)dt \Longrightarrow \Phi_{th}(x + dx) - \Phi_{th}(x) = -\,2hbdx \times (T - T_A) \Rightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx}dx = -2hbdx \times (T - T_A) \Rightarrow \boldsymbol{\frac{d\Phi_{th}}{dx} = -2hb \times (T - T_A)}$$

Loi de Fourier : $\Phi_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} S' \Longrightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx} = -\lambda S' \frac{d^2T}{dx^2} = -\lambda ab \frac{d^2T}{dx^2}$

L'équation différentielle s'écrit donc : $-\lambda ab \frac{d^2T}{dx^2} = -2hb \times (T - T_A) \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a} \times (T - T_A)} = 0$

$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \times (T - T_A) = 0$ $\qquad$ avec $L = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \times (T - T_A) = 0 \Longrightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{L^2} = -\frac{T_A}{L^2}$$

Solution de l'équation différentielle : $\boldsymbol{T(x) = Ae^{-\frac{x}{L}} + Be^{+\frac{x}{L}} + T_A}$

avec (AN), en prenant $a \approx 1\ mm$: $L = 2{,}8 \times 10^{-2} m = 2{,}8\ cm$ $\qquad$ or x peut être égale à $c \approx 20cm$, donc le terme en $e^{+\frac{x}{L}}$ ne peut exister, il tendrait vers des valeurs invraisemblables de température. Par conséquent, nécessairement $\boldsymbol{B = 0}$.

D'où : $T(x) = Ae^{-\frac{x}{L}} + T_A$

Condition aux limites : $T(x = 0) = T_M \Longrightarrow T_M = A + T_A \Longrightarrow A = T_M - T_A$

Au final : $\boldsymbol{T(x) = (T_M - T_A)e^{-\frac{x}{L}} + T_A}$

En estimant qu'il est conseillé de tenir le manche à 35°C : $\boldsymbol{T(x_{limite}) = 308\ K}$; en prenant $\boldsymbol{T_M = 100\ K}$ et $\boldsymbol{T_A = 298\ K}$

$$T(x_{douleur}) = (T_M - T_A)e^{-\frac{x_{limite}}{L}} + T_A \Longrightarrow e^{-\frac{x_{douleur}}{L}} = \frac{T(x_{limite}) - T_A}{T_M - T_A} \Longrightarrow -\frac{x_{limite}}{L} = ln\left(\frac{T(x_{limite}) - T_A}{T_M - T_A}\right)$$

$\boldsymbol{\Longrightarrow x_{limite} = -L \times ln\left(\frac{T(x_{limite}) - T_A}{T_M - T_A}\right)}$ $\qquad$ AN : $\boldsymbol{x_{limite} = 5{,}7 \times 10^{-2} m = 5{,}7\ cm}$ **selon ce modèle**