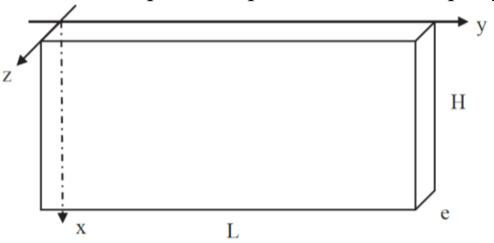
TD Physique n°4 : Phénomènes de transport – Conduction thermique

Exercice 1 : La température du mouton

On va rechercher l'évolution de la température corporelle d'une brebis au cours du temps. Pour cela, une toison de laine va être caractérisée par une valeur de conductivité thermique λ_{laine} supposée homogène et une valeur de capacité thermique massique c_{laine}. On considèrera par la suite une laine « moyenne » caractérisée par une conductivité thermique $\lambda_{laine} = 0{,}040\ W.m^{-1}.K^{-1}$.

Introduction

On considère un parallélépipède, de longueur L, de hauteur H et d'épaisseur e petite (e << min(L, H)), constitué d'un matériau homogène de conductivité λ (**figure 1**). Ce matériau est en présence de thermostats qui imposent à tout moment une température $T_{entrée}$ en z = 0 et $T_{sortie} < T_{entrée}$ en z = e. Ce matériau est parcouru par un flux thermique ϕ_{th} axial constant suivant l'axe (Oz).



1. *(BCPST1 et 2)* Définir puis établir l'expression de la résistance thermique R_{th} du matériau en fonction de e, λ, H et L.

Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

On modélise la brebis debout par un parallélépipède plein, de température uniforme $\theta_{eq} = 39°C$, de longueur $L = 100\ cm$ et de section carrée de côté $H = 30\ cm$. Le corps de la brebis est entouré d'une épaisseur qui peut varier de $e = e_M = 10cm$ de laine avant la tonte à $e = e_m = 5cm$ après la tonte. La situation est représentée en **figure 3** et en **figure 4**. On se place en régime permanent.

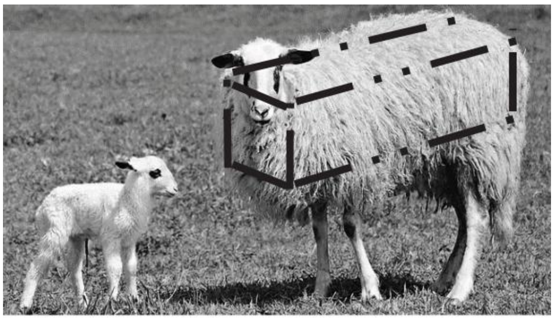


Figure 3 - Modélisation de la brebis

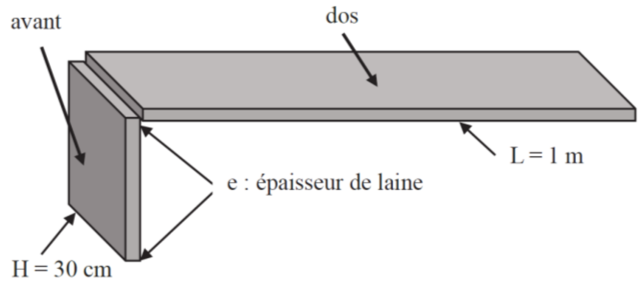


Figure 4 - Modélisation de la toison
Seules les parties lainières du dos et de l'avant ont été schématisées.

2. *(BCPST1)* Exprimer la résistance R_{diff} de cette carapace de laine, en fonction de L, H, e et λ_{laine}. Évaluer son ordre de grandeur pour les deux épaisseurs limites.

On doit tenir compte de deux autres phénomènes d'échanges thermiques : la conducto-convection (d'autant plus importante que le vent est fort) et le rayonnement thermique. Ces deux phénomènes ont lieu depuis la surface extérieure de la brebis. On donne la résistance de conducto-convection $R_{cc} = 0{,}18\ K.W^{-1}$ ainsi que la résistance thermique de rayonnement $R_r = 0{,}145\ K.W^{-1}$.

3. *(BCPST1)* Faire un schéma du montage des trois résistances R_{diff}, R_{cc} et R_r placées entre la température interne de la brebis $T_{int} = \theta_{eq} = 39°C$ et la température de l'air T_{air}. Évaluer numériquement les deux valeurs R_1 et R_2 des résistances équivalentes de la brebis non tondue et de la brebis tondue.

La brebis non tondue est dans un confort climatique pour la température de l'air égale à $T_0 = 5°C$. En plus des phénomènes de diffusion, conducto-convection et rayonnement, il y a évaporation d'eau par sudation. La brebis émet de la vapeur d'eau par les voies respiratoires <u>en toute situation</u> : m = 5,8 10^{-6} g s^{-1}. Elle en émet deux fois plus par sa surface cutanée quand elle vient d'être tondue : m' = 2m et que la température extérieure est supérieure à 5,1 °C. L'enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau, supposée indépendante de la température, vaut $\Delta H^0_{vap} = 2500\ kJ.kg^{-1}$.

4. *(BCPST1)* En déduire la puissance p_{m0} apportée à la brebis par son métabolismé dans une situation de confort juste avant la tonte. On l'exprimera en fonction de m, ΔH^0_{vap}, R_1, T_{int} et T_{air}, puis on en fera l'évaluation numérique pour $T_{air} = T_0 = 5°C$.
5. *(BCPST1)* Répondre à la même question pour la brebis juste après la tonte pour la température de confort $T_0 = 5°C$.

Exercice 2 : Mise en chambre d'un vin en bouteille

Une bouteille de vin, choisie dans la cave à une température de $T_0 = 8,0°C$ est mise « en chambre » dans la cuisine dont la température vaut $T_A = 22°C$. La bouteille est assimilée à un cylindre de hauteur H = 19,5 cm, de diamètre d= 7,6 cm et d'épaisseur e = 3mm. Dans cette modélisation, les échanges thermiques entre l'extérieur et le vin se font uniquement par la surface latérale de la bouteille. Par ailleurs, la température T(t) du vin est supposée uniforme, mais dépend lentement du temps ; celle du verre, en revanche, est fonction de r (distance à l'axe des coordonnées cylindriques) et le régime est quasi-stationnaire.

Données : *conductivité thermique du verre : $\lambda = 0,78\ W.m^{-1}.K^{-1}$*
coefficient d'échange convectif : h = 10 (USI)
capacité thermique massique du vin : $c = 4,0\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$

1. Calculer la résistance thermique R_{cond} de conduction de la partie latérale de la bouteille, en notant T_S la température en surface de la bouteille. Réaliser l'application numérique.
2. *(BCPST1)* L'échange thermique par convection entre l'air ambiant et la bouteille est bien représenté par la loi de Newton : $\varphi = hS(T_S - T_A)$ où le coefficient d'échange thermique h est considéré comme constant et uniforme sur toute la surface S et φ est le flux thermique dans l'air. Quelle est l'unité de h ? Exprimer la résistance thermique de convection R_{conv} de la surface latérale de la bouteille en fonction des données. Réaliser l'application numérique.
3. *(BCPST1)* Donner la valeur numérique de la résistance thermique totale R_{th} d'échange entre le vin et l'air extérieur.
4. *(BCPST1)* Réaliser un bilan énergétique sur le vin dans la bouteille afin d'obtenir une équation différentielle vérifiée par T(t).
5. *(BCPST1)* Exprimer puis calculer le temps nécessaire pour que le vin atteigne sa température optimale de dégustation T_D = 16°C.

Exercice 3 : Epaisseur de la croûte d'une comète

Données :

- *rayon de la comète :* $r_{com} = 1800\ m$
- *température moyenne estimée à la surface de la comète au périhélie :* $T_0 = -35\ °C$
- *température de la glace au cœur de la comète :* $T_1 = -73\ °C$
- *enthalpie molaire de sublimation de la glace :* $L_{sub} = 51\ kJ \cdot mol^{-1}$
- *masse molaire de l'eau :* $M_{H_2O} = 18\ g \cdot mol^{-1}$
- *conductivité thermique de la croûte de la comète :* $\lambda = 0,40\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

Rosetta est une mission spatiale de l'Agence spatiale européenne dont l'objectif principal est de recueillir des données sur la composition du noyau de la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko et sur son comportement à l'approche du Soleil. La sonde spatiale s'est placée en orbite autour de la comète puis, après une période d'observation de plusieurs mois, a envoyé le 12 novembre 2014 Philae, un petit atterrisseur, se poser sur sa surface pour analyser la composition de son sol et sa structure.

La comète est modélisée par une boule de centre O et de rayon r_{com}. La comète est constituée d'un cœur constitué de glace, entouré d'une croûte rocheuse d'épaisseur e.

En orbite autour du Soleil, la comète reçoit un flux thermique qui dépend de sa distance au centre du Soleil. On considère ainsi qu'au périhélie (atteint le 13 août 2015), la surface de la comète sera traversée par une densité moyenne de flux thermique $j_{com} = 30\ W \cdot m^{-2}$. Elle reçoit alors un flux thermique $\phi_{com} > 0$.

En régime permanent, l'énergie transportée par ce flux thermique traverse la croûte de la comète, dont le profil de température ne varie pas. Elle est alors dissipée à l'interface croûte/cœur par sublimation de la glace, à la température T_1.

1. *(BCPST1)* Exprimer littéralement la masse m_{gl} de glace sublimée pendant la durée Δt. Effectuer l'application numérique pour $\Delta t = 1\ s$.

On cherche désormais à établir le profil de la température dans la croûte (couche externe de la comète autour du cœur) caractérisée par une conductivité thermique λ, en régime permanent. La température est considérée uniforme dans le cœur ($T_{coeur} = T_1$).

2. Justifier que le flux thermique se conserve à travers chaque sphère de centre O dans la croûte de la comète.
3. En déduire l'équation à variables séparées $dT = \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda r^2} dr$.
4. Exprimer la température dans la croûte, à la distance r du centre de la comète, en fonction de T_0, température à la surface, ϕ_{com}, λ, r et r_{com}.
5. En déduire l'épaisseur e de la croûte en considérant $e \ll r_{com}$, en fonction de r_{com}, λ, ϕ_{com}, T_0 et T_1. Effectuer l'application numérique.

Exercice 4 : Température cutanée d'un mammifère

Un mammifère marin peut être sommairement schématisé par une sphère de muscles de centre O et de rayon R, dont le métabolisme dégage une puissance thermique volumique φ_0, uniformément dans tout son volume.
L'animal est plongé dans un fluide (eau ou air) de conductivité thermique λ_{eau} ou λ_{air}. La température très loin du mammifère est la température ambiante soit $T_0 = 293K$. On se place en régime stationnaire.

1. *(BCPST1)* Déterminer la puissance thermique Φ dégagée par le mammifère en fonction de R et de φ_0.
2. En raisonnant sur un système compris entre deux sphères concentriques de rayons r et r + dr, justifier que la puissance thermique Φ se conserve pour r > R.
3. (**) Montrer que la solution de l'équation différentielle s'écrit : $T(r) = T_0 + \frac{a}{r}$. On exprimera la constante *a* en fonction de R, λ et φ_0.
4. Exprimer la température cutanée, T_C, de l'animal.
5. Déterminer les valeurs de φ_0 pour avoir une température T_C = 303 K dans l'eau puis dans l'air. On donne : λ_{eau} = 500 SI, λ_{air} = 5 SI et R = 25 cm. Ces valeurs permettent d'avoir un rapport surface/volume voisin de celui d'un être humain.

Exercice 5 : Etude d'un fusible en régime permanent

- *Un fusible est constitué par un fil conducteur en plomb cylindrique homogène de longueur utile L et de section droite S.*
- *Il possède une conductivité électrique σ et une conductivité thermique λ. Il est traversé par un courant d'intensité constante I.*
- *Ce fil est enfermé dans une gaine en silice assurant une isolation thermique et électrique parfaite.*
- *Les températures en x = 0 et x = L sont imposées, et égales à la température T_0 du milieu ambiant.*
- *On suppose le régime stationnaire établi.*

Données :
$I_{max} = 10,0$ A ; $T_0 = 300$ K ; $\sigma = 5,00.10^6\ \Omega^{-1}m^{-1}$; $\lambda = 35\ W.m^{-1}K^{-1}$; L = 3,0 cm. Température de fusion du plomb : T_{fus}=600K.

1. On indique que la résistance électrique R du fil s'écrit : $R = \frac{L}{\sigma S}$

a. *(BCSPT1)* En déduire l'expression de la puissance électrique reçue par ce fil, en fonction de σ, L, S et I.
b. (**) En déduire la puissance électrique reçue par une tranche d'épaisseur *dx* du fil électrique, en fonction de σ, dx, S et I.

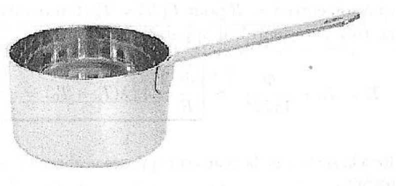
2. a. (***) A partir d'un bilan énergétique établi localement, établir l'équation différentielle vérifiée par la température dans le fil.
b. (**) Donner l'expression littérale de T(x).
c. (**) Déterminer le rayon *a* du fil pour que le fusible admette une intensité maximale de 10A.

Exercice 6 : Réacteur nucléaire

Dans un réacteur nucléaire, le combustible est de l'uranium, enfermé dans une gaine en zirconium, cylindrique de rayon R = 1cm, de longueur L = 4 m et d'épaisseur négligeable. L'ensemble uranium-gaine constitue un « crayon ». L'uranium contenu dans chaque « crayon » dégage une puissance volumique $\varphi = 200\ MW.m^{-3}$. La température extérieure d'un « crayon » est maintenue constante à T_e = 600 K, et on se place en régime permanent, à savoir qu'en tout point M du « crayon », la température ne dépend plus du temps. On suppose également qu'elle dépend uniquement de la distance r = OM du point M à l'axe du cylindre.

1. (***) Établir, à partir d'un bilan thermique dans la couche d'uranium de rayon r, l'équation différentielle vérifiée par T(r). On montrera qu'elle se met sous la forme $\frac{dT}{dr} = -Ar$, où A est une constante à déterminer. Pour la suite, on prendra $A = 3,33 \times 10^7$ m^2K.
2. (**) Déterminer la loi T(r) en fonction de R, φ, λ et r.
3. (**) Calculer la température maximale d'un barreau.
4. La température de fusion du combustible est T_f = 2900K. Quelle est la valeur limite R_{lim} du rayon du cylindre au-delà de laquelle la fusion du combustible risque d'intervenir ? La valeur de R = 1 cm est-elle bien choisie ?

Une casserole en fer est remplie d'eau bouillante. Proposer un modèle pour estimer la distance à laquelle il faut tenir le manche (aussi en fer) de la casserole depuis l'extrémité la plus proche de l'eau. Le fabricant indique que la température limite conseillée pour tenir le manche est de 35,0°C.



Données : Conductivité thermique du fer : $\lambda_{Fe} = 80\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Coefficient de transfert convectif entre l'air et un métal $h \approx 50\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$