

Exercice n°1 : Skieur sur une pente

1. Référentiel : terrestre supposé galiléen

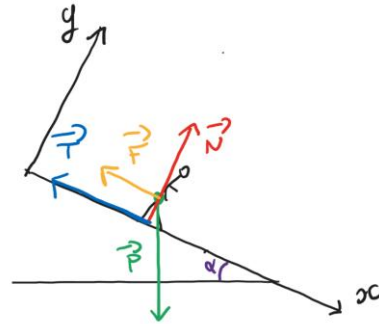
Système : skieur de masse m assimilé à un point matériel

Forces extérieures s'exerçant sur le skieur :

$$\text{Poids : } \vec{P} = m\vec{g}$$

$$\text{Force de frottement : } \vec{F} = -\lambda \vec{v}$$

$$\text{Réaction du support : } \vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$



Principe fondamental de la dynamique (PFD) : $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{N}$

Projection sur l'axe (Oy) : $0 = -mg\cos\alpha + \|\vec{N}\| \Rightarrow \|\vec{N}\| = mg\cos\alpha$

$$\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = fmg\cos\alpha$$

2. Projection sur l'axe (Ox) : $ma_x = m\dot{v}_x = +mgsin\alpha - \|\vec{T}\| - \lambda v_x = m\dot{v}_x = +mgsin\alpha - fmg\cos\alpha - \lambda v_x$

Or $\dot{v}_x = v \Rightarrow m\dot{v} = +mgsin\alpha - fmg\cos\alpha - \lambda v \Rightarrow \dot{v} + \frac{\lambda}{m}v = g(sin\alpha - f\cos\alpha)$

Solution générale de l'équation différentielle : $v(t) = Ae^{-\frac{\lambda}{m}t} + \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda}$

Condition initiale : $v(t=0) = 0 \Rightarrow A + \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} = 0 \Rightarrow A = -\frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda}$

Bilan : $v(t) = \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} \times \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} \times \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) \Rightarrow x(t) = \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} \times \left(t + \frac{m}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) + B$$

Condition initiale : $x(t=0) = 0 \Rightarrow \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} \times \frac{m}{\lambda} + B \Rightarrow B = -g(sin\alpha - f\cos\alpha) \times \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2$

Bilan : $x(t) = \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} \times \left(t + \frac{m}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) - g(sin\alpha - f\cos\alpha) \times \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2$
 $\Rightarrow x(t) = \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda} \times \left[t + \frac{m}{\lambda}(e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1)\right]$

3. $v_{lim} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{\lambda}$ AN : $v_{lim} = 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

4. $v(t_1) = \frac{v_{lim}}{2} \Rightarrow v_{lim} \times \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t_1}\right) = \frac{v_{lim}}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\frac{\lambda}{m}t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\lambda}{m}t_1 = -\ln 2 \Rightarrow t_1 = \frac{m}{\lambda} \ln 2$
 AN : $t_1 = 6,3 \text{ s}$

5. Nouvelle origine des temps et de l'axe à partir de la chute : $x(t=0) = 0$ et $v(t=0) = \frac{v_{lim}}{2}$

PFD : $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$

Projection sur (Ox) : $m\ddot{x} = +mgsin\alpha - 20fmg\cos\alpha \Rightarrow \ddot{x} = gsin\alpha - 20fg\cos\alpha$
 $\Rightarrow \dot{x}(t) = (gsin\alpha - 20fg\cos\alpha) \times t + A'$

Condition initiale : $\dot{x}(t=0) = v(t=0) = \frac{v_{lim}}{2} = A'$

Bilan : $\dot{x}(t) = (gsin\alpha - 20fg\cos\alpha) \times t + \frac{v_{lim}}{2}$

$$\Rightarrow x(t) = (gsin\alpha - 20fg\cos\alpha) \times \frac{t^2}{2} + \frac{v_{lim}}{2}t + B'$$

Condition initiale : $x(t=0) = 0 \Rightarrow B' = 0$

Bilan : $x(t) = (gsin\alpha - 20fg\cos\alpha) \times \frac{t^2}{2} + \frac{v_{lim}}{2}t$

Le skieur s'arrête au temps t_2 lorsque : $\dot{x}(t=t_2) = 0 \Rightarrow (gsin\alpha - 20fg\cos\alpha) \times t_2 + \frac{v_{lim}}{2} = 0$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{v_{lim}}{2} \frac{1}{20fg\cos\alpha - gsin\alpha}$$

On en déduit la distance d'arrêt : $x(t=t_2) = (gsin\alpha - 20fg\cos\alpha) \times \frac{v_{lim}^2}{8} \times \left(\frac{1}{(20fg\cos\alpha - gsin\alpha)}\right)^2 + \frac{v_{lim}^2}{4} \frac{1}{20fg\cos\alpha - gsin\alpha}$

$x(t=t_2) = \frac{v_{lim}^2}{8} \times \frac{1}{20fg\cos\alpha - gsin\alpha}$ AN : $x(t=t_2) = 650 \text{ m}$

Exercice n°2 : Constante de raideur d'un ressort

Méthode n°1 : Etude du ressort à l'équilibre

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Système : masse m suspendue au ressort assimilé à un point matériel

Forces extérieures s'exerçant sur la masse m :

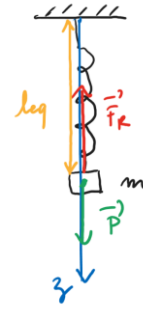
$$\text{Poids : } \vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$$

$$\text{Force de rappel du ressort : } \vec{F}_R = -k \times (\ell - \ell_0)\vec{u}_z$$

A l'équilibre :

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{F}_R &= \vec{0} \Rightarrow +mg - k \times (\ell_{eq} - \ell_0) = 0 \Rightarrow k \times (\ell_{eq} - \ell_0) = mg \Rightarrow \ell_{eq} \\ &= \ell_0 + \frac{g}{k} \times m \end{aligned}$$

Il suffit alors de déterminer pour plusieurs masses différentes m , plusieurs longueurs à l'équilibre ℓ_{eq} et de tracer ℓ_{eq} en fonction de m . Le coefficient directeur de la droite obtenue, égal à $\frac{g}{k}$, permet d'obtenir k .



Méthode n°2 : Etude du ressort en mouvement (hypothèse de l'oscillateur harmonique)

Principe fondamental de la dynamique (PFD) : $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_R$ en considérant que les forces de frottement sont négligeables

En projection sur l'axe (Oz) vertical descendant (voir schéma) : $m\ddot{z} = mg - k \times (\ell - \ell_0)$

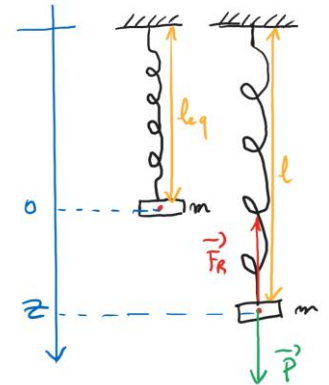
En posant : $Z = \ell - \ell_{eq} \Rightarrow \ell = Z + \ell_{eq}$, on obtient : $m\ddot{z} = m\ddot{Z} = mg - k \times (Z + \ell_{eq} - \ell_0) = -kZ + mg - k \times (\ell_{eq} - \ell_0)$

Or d'après l'étude précédente : $mg - k \times (\ell_{eq} - \ell_0) = 0$

On en déduit l'équation différentielle : $m\ddot{Z} = -kZ \Rightarrow \ddot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0$

La solution générale s'écrit : $Z = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{k}}\right) \times \sqrt{m}$

Il suffit alors de mesurer la période d'oscillation T_0 pour plusieurs masses m , et de tracer T_0 en fonction de $\sqrt{m}$. Le coefficient directeur de la droite obtenue, égal à $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$, permet d'obtenir k .



Exercice n°3 : Sédimentation d'un globule rouge

1. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

Système : globule rouge assimilé à une sphère de masse $m = \frac{4}{3}\mu_0\pi R^3$ assimilé à un point matériel

Forces extérieures s'exerçant sur le globule rouge :

$$\text{Poids : } \vec{P} = m\vec{g} = \frac{4}{3}\mu_0\pi R^3\vec{g}$$

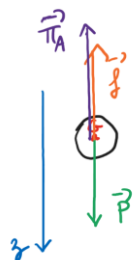
$$\text{Force de frottement : } \vec{f} = -\alpha\vec{v}$$

$$\text{Poussée d'Archimède : } \vec{\Pi}_A = -m_{\text{fluide déplacé}}\vec{g} = -\frac{4}{3}\mu\pi R^3\vec{g}$$

Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi}_A + \vec{f}$

En projection sur l'axe (Oz) descendant : $\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3\frac{dv_z}{dt} = \frac{4}{3}\mu_0\pi R^3g - \frac{4}{3}\mu\pi R^3g - \alpha v_z \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} +$

$$\frac{\alpha}{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}v_z = g\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)$$



2. La résolution de l'équation différentielle donne : $v_z = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}{\alpha} \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)$ avec $\tau = \frac{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}{\alpha}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_z = \frac{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}{\alpha} \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) \Rightarrow v_{\text{lim}} = \tau \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)$$

3. $v_{\text{lim}} = \frac{H}{\tau} \Rightarrow T = \frac{H}{v_{\text{lim}}} = \frac{H}{\tau \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)}$

Pour les AN, l'énoncé oublie de dire que $\alpha = 6\pi\eta R$ donnant $\tau = \frac{2\mu_0 R^2}{9\eta}$.

On calcule alors : $\tau = 0,12 \text{ s}$ et $T = 1,2 \times 10^5 \text{ s} = 1,4 \text{ jour}$. Donc $\tau \ll T$: le régime permanent est donc bien atteint très rapidement.

Exercice n°4 : Flottabilité d'un glaçon

14. $\vec{\Pi}_A = -m_{\text{eau liquide déplacé}} \vec{g} = -\rho_l V_{\text{glaçon immergé}} \vec{g} = -\rho_l V_i \vec{g}$

15. Poussée d'Archimède = résultante des forces pressantes exercées par un fluide sur un solide immergé dans ce fluide.

16. La poussée d'Archimède exercée par l'air sur le glaçon est orientée dans le sens de $\vec{g}$

17. **Référentiel** : Terrestre supposé galiléen

Système : glaçon

Forces extérieures :

Poids : $\vec{P} = m_{\text{totale de glaçon}} \vec{g} = \rho_g V_{\text{total de glaçon}} \vec{g} = \rho_g (V_i + V_e) \vec{g}$

Poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A = -\rho_l V_i \vec{g}$

A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{\Pi}_A = \vec{0} \Rightarrow \rho_g (V_i + V_e) \vec{g} - \rho_l V_i \vec{g} = 0 \Rightarrow \rho_g (V_i + V_e) = \rho_l V_i \Rightarrow V_e = \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1 \right) \times V_i$

18. **Avant la fonte du glaçon** : $\frac{V_i}{V_{\text{total de glaçon}}} = \frac{V_i}{V_i + V_e} = \frac{\rho_g}{\rho_l} \Rightarrow V_i = V_{\text{occupé par le glaçon dans l'eau (avant fonte)}} = \frac{\rho_g}{\rho_l} \times V_{\text{total de glaçon}}$

Après la fonte du glaçon : $V_{\text{occupé par le glaçon fondu}} = \frac{m_{\text{totale de glaçon}}}{\rho_{\text{eau liquide}}} = \frac{V_{\text{total de glaçon}} \times \rho_g}{\rho_l} = \frac{\rho_g}{\rho_l} \times V_{\text{total de glaçon}}$

Bilan : $V_{\text{occupé par le glaçon dans l'eau (avant fonte)}} = V_{\text{occupé par le glaçon fondu}}$

Le volume occupé par le glaçon dans l'eau, avant sa fonte, est le même que le volume occupé (dans l'eau) par le glaçon une fois fondu : le niveau de l'eau ne bouge pas.

19. Dans l'eau salée : $V_{\text{occupé par le glaçon dans l'eau (avant fonte)}} = \frac{\rho_g}{\rho_{\text{eau salée}}} \times V_{\text{total de glaçon}}$
 $V_{\text{occupé par le glaçon fondu}} = \frac{m_{\text{totale de glaçon}}}{\rho_{\text{eau pure}}} = \frac{V_{\text{total de glaçon}} \times \rho_g}{\rho_{\text{eau pure}}} = \frac{\rho_g}{\rho_{\text{eau pure}}} \times V_{\text{total de glaçon}}$

$\rho_{\text{eau salée}} > \rho_{\text{eau pure}} \Rightarrow V_{\text{occupé par le glaçon fondu}} > V_{\text{occupé par le glaçon dans l'eau (avant fonte)}}$

Le niveau de liquide monte dans le récipient.

20. La masse volumique de l'eau de mer est proche de celle de l'eau pure (35 g/L de sel donc $\rho_{\text{mer}} = 1,035 \text{ g/L}$), donc la fonte des icebergs ne contribue pas de manière négligeable à l'augmentation du niveau des océans.