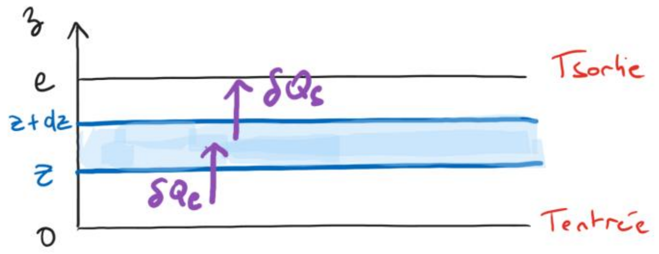
TD Physique n°4 : Phénomènes de transport – Conduction thermique - Correction

Exercice 1 : La température du mouton

1. **Système** : tranche d'épaisseur comprise entre z et z+dz, étudiée entre t et t+dt



Bilan d'énergie : transformation monobare ($P_i = P_f = P_{ext} = \text{cste}$) $\Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s$

En régime stationnaire : $dH = 0 \Longrightarrow \delta Q_e - \delta Q_s = 0 \Longrightarrow \delta Q_e = \delta Q_s$

$\delta Q_e = \Phi_{th}(z)dt$ et $\delta Q_s = \Phi_{th}(z+dz)dt \quad \Longrightarrow \Phi_{th}(z)dt = \Phi_{th}(z+dz)dt \Longrightarrow \Phi_{th}(z) = \Phi_{th}(z+dz)$

$\Longrightarrow \Phi_{th} = cst$: le flux se conserve

Loi de Fourier : $\Phi_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} S$

$$\Longrightarrow dT = -\frac{\Phi_{th}}{\lambda S} dz \Longrightarrow \int_{T_{entrée}}^{T_{sortie}} dT = -\frac{\Phi_{th}}{\lambda S} \int_0^e dx \Longrightarrow (T_{sortie} - T_{entrée}) = -\frac{\Phi_{th}}{\lambda S} \times e$$

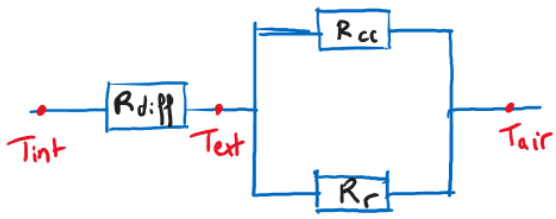
$$\boldsymbol{R_{th}} = \frac{T_{amont} - T_{aval}}{\Phi_{th}} = \frac{T_{entrée} - T_{sortie}}{\Phi_{th}} = \frac{\mathrm{e}}{\lambda S} = \frac{\mathbf{e}}{\boldsymbol{\lambda HL}}$$

2. Les 6 faces sont en // : $\frac{1}{R_{diff}} = \frac{4}{R_{dos}} + \frac{2}{R_{avant}} \Longrightarrow R_{diff} = \frac{1}{\frac{4}{R_{dos}} + \frac{2}{R_{avant}}}$

avec $R_{dos} = \frac{\mathrm{e}}{\lambda_{laine} HL}$ $(S = HL)$ et $R_{avant} = \frac{\mathrm{e}}{\lambda_{laine} H^2}$ $(S = H^2)$

AN : $\boldsymbol{R_{diffm}} = 0{,}9\ \boldsymbol{K \cdot W^{-1}}$ $\qquad \boldsymbol{R_{diffM}} = 1{,}8\ \boldsymbol{K \cdot W^{-1}}$

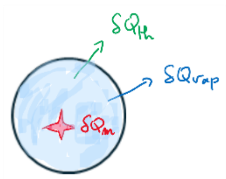
3. **Schéma électrique équivalent** :



La résistance équivalente s'écrit alors : $R_{eq} = \frac{T_{int} - T_{air}}{\Phi_{th}} = R_{diff} + \frac{R_{cc} R_r}{R_{cc} + R_r}$ avec $\Phi_{th} = \Phi_{diff}$

AN : $\boldsymbol{R_1} = 1{,}9\ \boldsymbol{K \cdot W^{-1}}$ $\qquad \boldsymbol{R_2} = 0{,}17\ \boldsymbol{K \cdot W^{-1}}$

4. **Système** : brebis



Transformation monobare $\Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_{reçu} - \delta Q_{perdu} = \delta Q_m - (\delta Q_{th} + \delta Q_{vap})$

Attention : ici tous les transferts thermiques sont comptés positivement

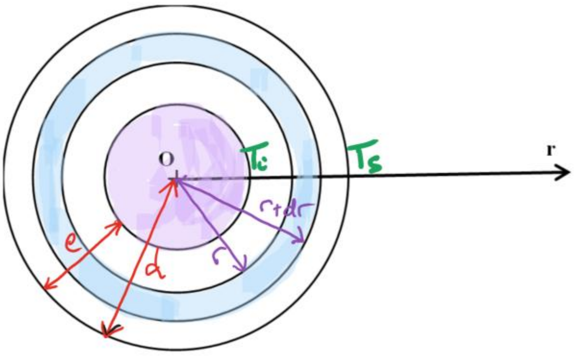
Régime stationnaire : $dH = 0 \Longrightarrow \delta Q_m = \delta Q_{th} + \delta Q_{vap}$

$\Longrightarrow p_{m0} = \Phi_{th} + \Phi_{vap} \Longrightarrow p_{m0} = \frac{T_{int} - T_{air}}{R_1} + m \times \Delta H_{vap}^0$ $\qquad AN:\ p_{m0} = 18\ W$

5. $p'_{m0} = \frac{T_{int} - T_{air}}{R_2} + m' \times \Delta H_{vap}^0$ $\qquad AN:\ p'_{m0} = 200\ W$

Exercice 2 : Mise en chambre d'un vin en bouteille

1. **Système :** coquille cylindrique comprise entre deux cylindres de rayons r et $r + dr$ où $d - e \leq r \leq d$, étudiée entre les instants t et $t + dt$



En régime stationnaire et en l'absence de sources internes ou de pertes thermiques autres que par conduction thermique, le flux conductif se conserve : $\boldsymbol{\Phi_{cond} = cst}$

Loi de Fourier : $\Phi_{cond} = -\lambda S \frac{dT}{dr} = -\lambda \times 2\pi r H \times \frac{dT}{dr}$

Φ_{th} étant constant (en notant T_i est la température à l'intérieur de la bouteille)

$\Rightarrow R_{cond} = \frac{T_{amont} - T_{aval}}{\Phi_{cond}} = \frac{T_i - T_S}{\Phi_{cond}} \Rightarrow R_{cond} = \frac{1}{2\pi\lambda H} \times ln\left(\frac{d}{d-2e}\right)$ (>0)

$\Rightarrow R_{cond} = 7{,}7 \times 10^{-2}\ K \cdot W^{-1}$

2. $\Phi_{conv} = \frac{T_{amont} - T_{aval}}{R_{conv}} \Rightarrow hS(T_S - T_A) = \frac{T_S - T_A}{R_{conv}} \Rightarrow R_{conv} = \frac{1}{hS} = \frac{1}{h \times \pi \times d \times H}$ (>0)

   h s'exprime en $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$

   AN : $R_{conv} = 2{,}0 \times 10^{-2}\ K \cdot W^{-1}$

3. Les résistances conductives et convectives étant en série : $R_{th} = R_{cond} + R_{conv} = 9{,}7 \times 10^{-2}\ K \cdot W^{-1}$

4. **Système** : vin dans la bouteille, étudié entre les instants t et $t + dt$

   Bilan d'énergie (monobare : $\boldsymbol{P_{ext} = cste}$) : $dH = \delta Q = -\Phi dt$ avec $\Phi = \Phi_{cond} = \Phi_{conv}$ (série donc même flux)

   avec : $\Phi = \frac{T - T_A}{R_{th}}$ où T est la température du système et $dH = CdT = mcdT$

$$\Rightarrow mcdT = -\frac{T - T_A}{R_{th}} dt \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{mcR_{th}} T = \frac{1}{mcR_{th}} T_A$$

5. Solution générale de l'équation différentielle : $T(t) = k \times e^{-\frac{t}{\tau}} + T_A$ avec : $\tau = mcR_{th}$

   Condition initiale : $T(t = 0) = k + T_A = T_0 \Rightarrow k = T_0 - T_A$

   Bilan : $T(t) = (T_0 - T_A) \times e^{-\frac{t}{\tau}} + T_A$

$$T(t = t_D) = T_D = (T_0 - T_A) \times e^{-\frac{t_D}{\tau}} + T_A \Rightarrow e^{-\frac{t_D}{\tau}} = \frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}$$

$$\Rightarrow t_D = -\tau \times ln\left(\frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}\right) = -\tau \times ln\left(\frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}\right) = mcR_{th} \times ln\left(\frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}\right)$$

$$= \rho \times \pi \times \left(\frac{d}{2} - e\right)^2 \times H \times R_{th} \times ln\left(\frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}\right)$$

$AN : t_D = 334\ s$

Exercice 3 : Epaisseur de la croûte d'une comète

1. La quantité de chaleur reçue pendant Δt par la surface du cœur de la comète vaut : $\phi_{com}\Delta t$

Cette énergie thermique permet la sublimation de la glace : $\phi_{com}\Delta t = n_{glace}L_{sub} = \frac{m_{glace}}{M_{glace}}L_{sub}$

Par analyse dimensionnelle : $\phi_{com} = j_{com} \times S_{com} = j_{com} \times 4\pi r_{com}^2$

On obtient donc : $j_{com} \times 4\pi r_{com}^2 \times \Delta t = \frac{m_{glace}}{M_{glace}}L_{sub} \Rightarrow \boldsymbol{m_{glace}} = \frac{\boldsymbol{j_{com}\times 4\pi r_{com}^2 \times \Delta t \times M_{glace}}}{\boldsymbol{L_{sub}}} \Rightarrow \boldsymbol{m_{glace}} = 431\ \boldsymbol{kg}$

2. En absence de sources internes (énergie apportée ou perdue) et en régime stationnaire, le flux se conserve.

3. Loi de Fourier (symétrie sphérique) : $\Phi_{th} = -\lambda S\frac{dT}{dr} = -\lambda 4\pi\lambda r^2\frac{dT}{dr}$ avec $\Phi_{th} = -\phi_{com}$ (car ϕ_{com} est orientée de l'extérieur de la comète vers l'intérieur, tandis que Φ_{th} est orienté dans le sens des r croissants donc de l'intérieur vers l'extérieur de la comète).

On obtient : $\boldsymbol{dT = +\frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda r^2}dr}$

4. $\int_{T_0}^{T} dT = \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda}\int_{r_{com}}^{r}\frac{dr}{r^2}$ ϕ_{com} étant constant

Ce qui donne : $T - T_0 = \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda}\times\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_{com}}\right) \Rightarrow \boldsymbol{T = T_0 + \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda}\times\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_{com}}\right)}$

5. Pour $r = r_{com} - e$: $T = T_1$

On obtient donc : $T_1 = T_0 + \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda}\times\frac{-e}{(r_{com}-e)\times r_{com}} \approx T_0 - \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda}\times\frac{e}{{r_{com}}^2}$ si $e \ll r_{com}$

$$\Rightarrow e = \frac{(T_0 - T_1)\times 4\pi\lambda {r_{com}}^2}{\phi_{com}} = \frac{(T_0 - T_1)\times 4\pi\lambda {r_{com}}^2}{\phi_{com}} \Rightarrow \boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{(T_0 - T_1)\times\lambda}}{\boldsymbol{j_{com}}} \Rightarrow \boldsymbol{e} = 51\times 10^{-2}\boldsymbol{m} = 51\boldsymbol{cm}$$

Exercice 3bis : Epaisseur d'un igloo

Système d'étude : Système d'étude : coquille hémisphérique comprise entre r et $r+dr$ où $0 < r < R_{int}$, entre les instants t et $t+dt$

Quantité de chaleur algébrique entrante en r par conduction thermique : $\delta Q_e = \Phi(r)dt$

Quantité de chaleur algébrique sortante en r+dr par conduction thermique : $\delta Q_s = \Phi(r+dr)dt$

Bilan d'énergie en régime stationnaire : $P_{ext} = cst \Rightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s$

En régime stationnaire : $dH = 0 \Rightarrow \delta Q_e = \delta Q_s \Rightarrow \Phi(r) = \Phi(r+dr) \Rightarrow \boldsymbol{\Phi = P = cste}$ **: le flux se conserve et est égal au flux thermique crée par le métabolisme de l'habitant**

Loi de Fourier : $\phi_{th} = P = cst = -\lambda S\frac{dT}{dr} = -\lambda 2\pi r^2\frac{dT}{dr}$ (surface d'une hémisphère de rayon r : $2\pi r^2$)

$$\Rightarrow \int_{T_{int}}^{T_{ext}} dT = -\frac{P}{2\pi\lambda}\int_{R_{int}}^{R_{int}+e}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow T_{ext} - T_{int} = -\frac{P}{2\pi\lambda}\times\left(-\frac{1}{R_{int}+e}+\frac{1}{R_{int}}\right) = -\frac{P}{2\pi\lambda}\times\frac{e}{(R_{int}+e)\times R_{int}}$$

$$\Rightarrow (T_{ext}-T_{int})\times(R_{int}+e)\times R_{int} = -\frac{P}{2\pi\lambda}\times e \Rightarrow (T_{ext}-T_{int})\times {R_{int}}^2 = -\left(\frac{P}{2\pi\lambda}+(T_{ext}-T_{int})\times R_{int}\right)\times e$$

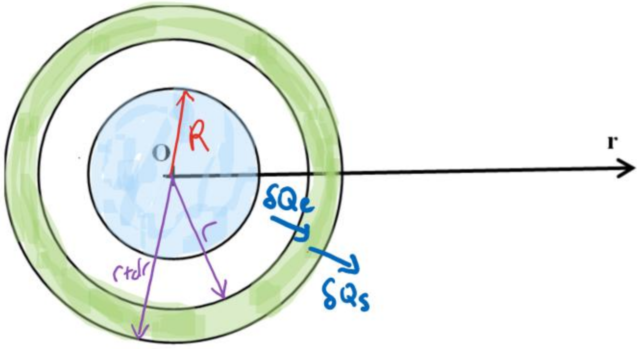
$\Rightarrow e = -\frac{(T_{ext}-T_{int})\times {R_{int}}^2}{\frac{P}{2\pi\lambda}+(T_{ext}-T_{int})\times R_{int}}$ AN : $\boldsymbol{e = 0{,}23\ m}$

Remarque : la résistance thermique d'une coquille sphérique de rayon intérieur R_1 (à la température T_1) et de rayon extérieur R_2 (à la température T_2), rempli d'un matériau de conductivité thermique λ se calcule de la même manière :

$\phi_{th} = cst = -\lambda S\frac{dT}{dr} = -\lambda 4\pi r^2\frac{dT}{dr}$ (surface d'une sphère de rayon r : $4\pi r^2$)

$$\Longrightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi_{th}}{4\pi\lambda}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} \Longrightarrow T_2 - T_1 = -\frac{\phi_{th}}{4\pi\lambda}\times\left(-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right) = -\frac{\phi_{th}}{4\pi\lambda}\times\frac{R_2-R_1}{R_1R_2} \Longrightarrow \boldsymbol{R_{th}} = \frac{\boldsymbol{T}_1-\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{\phi_{th}}} = \frac{1}{4\boldsymbol{\pi\lambda}}\times\frac{\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1}{\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2}$$

Exercice 4 : Température cutanée d'un mammifère



1. $\phi = \varphi_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3$

2. **Système d'étude :** Système d'étude : coquille sphérique comprise entre r et $r + dr$, entre les instants t et $t + dt$
Quantité de chaleur algébrique entrante en r par conduction thermique : $\delta Q_e = \Phi(r)dt$
Quantité de chaleur algébrique sortante en r+dr par conduction thermique : $\delta Q_s = \Phi(r + dr)dt$
Bilan d'énergie en régime stationnaire : $P_{ext} = cst \Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s$

En régime stationnaire : $dH = 0 \Rightarrow \delta Q_e = \delta Q_s \Rightarrow \Phi(r) = \Phi(r + dr) \Longrightarrow \boldsymbol{\Phi = cste}$ **: le flux se conserve**

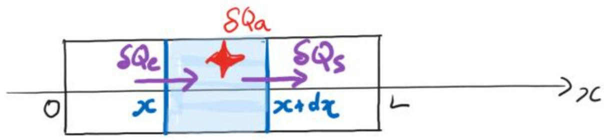
3. **Loi de Fourier :** $\phi = -\lambda S \frac{dT}{dr} = -\lambda 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} = cste = \varphi_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3$
$$\Longrightarrow r^2 \frac{dT}{dr} = -\varphi_0 \times \frac{1}{3\lambda} R^3 \Longrightarrow \int_{T(r)}^{T_0} dT = -\frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda} \int_r^{+\infty} \frac{dr}{r^2}$$
$$\Longrightarrow T_0 - T(r) = -\frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda} \times \left[-\frac{1}{r}\right]_r^{+\infty} = -\frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda} \times \frac{1}{r} \Longrightarrow \boldsymbol{T(r) = T_0 + \frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda} \times \frac{1}{r}}$$

4. $T(r = R) = T_C \Longrightarrow \boldsymbol{T_C = T_0 + \frac{\varphi_0 R^2}{3\lambda}}$
5. $T_C = T_0 + \frac{\varphi_0 R^2}{3\lambda} \Longrightarrow \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{3\lambda \times (T_C - T_0)}{R^2}}$
AN : $\varphi_{0,eau} = 2{,}4 \times 10^5\ W.m^{-3}$ $\varphi_{0,air} = 2{,}4 \times 10^3\ W.m^{-3}$

Exercice 5 : Etude d'un fusible en régime permanent

1. **a**. La puissance électrique reçue par le fil est : $P = \mathrm{R} \times \boldsymbol{I}^2 = \frac{L}{\sigma S}\boldsymbol{I}^2$
b. La puissance électrique reçue par une tranche d'épaisseur dx du fil électrique : $\boldsymbol{P_{dx} = R_{dx} \times I^2 = \frac{dx}{\sigma S} I^2}$

2. **a.** Système d'étude : tranche d'épaisseur dx, comprise entre x et $x + dx$, entre les instants t et $t + dt$



Bilan d'énergie sur une tranche d'épaisseur dx : $P_{ext} = cst \Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e + \delta Q_a - \delta Q_s$

En régime stationnaire : $dH = 0 \Rightarrow \delta Q_e + \delta Q_a = \delta Q_s \Longrightarrow \delta Q_e + \delta Q_a = \delta Q_s$

où : δQ_e : quantité de chaleur entrante (algébrique) par conduction thermique
δQ_s : quantité de chaleur sortante (algébrique) par conduction thermique
δQ_a : quantité de chaleur apportée par effet joule

$$\Longrightarrow \Phi_{th,e}dt + \frac{dx}{\sigma S} I^2 dt = \Phi_{th,s}dt \Longrightarrow \Phi_{th}(x)dt + \frac{dx}{\sigma S} I^2 dt = \Phi_{th}(x + dx)dt \Longrightarrow \Phi_{th}(x) + \frac{dx}{\sigma S} I^2 = \Phi_{th}(x + dx$$
$$\Rightarrow \Phi_{th}(x + dx) - \Phi_{th}(x) = \frac{dx}{\sigma S} I^2 \Longrightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx} dx = \frac{dx}{\sigma S} I^2 \Longrightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx} = \frac{I^2}{\sigma S}$$

Loi de Fourier : $\Phi_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} S \Longrightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx} = -\lambda S \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{I^2}{\sigma S}$

L'équation différentielle s'écrit donc : $\boldsymbol{\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\lambda\sigma S^2}}$

b. $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\lambda\sigma S^2} \Longrightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{I^2}{\lambda\sigma S^2}x + a \Longrightarrow T = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}x^2 + ax + b$

Conditions aux limites : $T(x=0) = T_0 \Longrightarrow b = T_0$

$$T(x=L) = T_0 \Longrightarrow -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L^2 + aL + T_0 = T_0 \Longrightarrow -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L^2 + aL = 0 \Longrightarrow a = \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L$$

Bilan : $\boldsymbol{T = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}x^2 + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}Lx + T_0}$

c. L'intensité maximale du fusible est atteinte lorsque la température maximale T_{max} est égale à la température de fusion du plomb.

Recherche de la température maximale T_{max} du fil :

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Longrightarrow -\frac{I^2}{\lambda\sigma S^2}x + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L = 0 \Longrightarrow x = \frac{L}{2}$$

$$\boldsymbol{T_{max}} = T\left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L\left(\frac{L}{2}\right) + T_0 = \boldsymbol{\frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma S^2} + T_0}$$

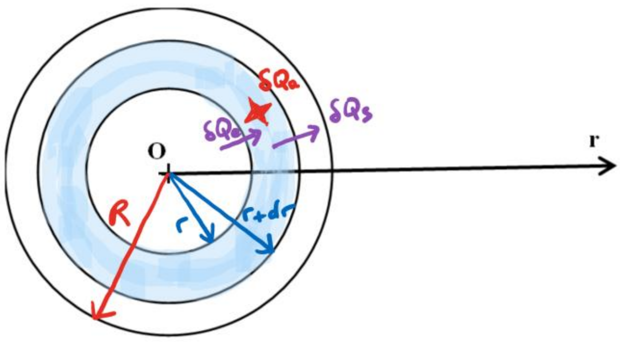
$$T_{max} = T_{fus} \Longrightarrow \frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma S^2} + T_0 = T_{fus} \Longrightarrow \frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma S^2} = T_{fus} - T_0 \Longrightarrow S^2 = \frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma \times (T_{fus} - T_0)} \Longrightarrow S = \left(\frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma \times (T_{fus} - T_0)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Or : $S = \pi a^2$

Donc : $\pi a^2 = \frac{IL}{\sqrt{8\lambda\sigma\times(T_{fus}-T_0)}} \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{IL})^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}(8\boldsymbol{\lambda\sigma}\times(\boldsymbol{T_{fus}}-\boldsymbol{T_0}))^{\frac{1}{4}}}$ AN : $\boldsymbol{a = 9{,}2 \times 10^{-4} m = 0{,}92\ m}$

Exercice 6 : Réacteur nucléaire

1. Schéma (vue de dessus) :



- **Système d'étude :** coquille cylindrique comprise entre deux cylindres de rayons r et r + dr (r<R), de hauteur L, entre les instants t et t + dt

- **Quantité de chaleur algébrique entrante en r par conduction thermique** : $\delta Q_e = \Phi_{th}(r)dt$
Quantité de chaleur algébrique sortante en r+de par conduction thermique : $\delta Q_s = \Phi_{th}(r+dr)dt$
Quantité de chaleur apportée par la réaction nucléaire : $\delta Q_a = \varphi dVdt = \varphi 2\pi rLdrdt$

- **Bilan d'énergie en régime stationnaire :**

$P_{ext} = cst \Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e + \delta Q_a - \delta Q_s$

En régime stationnaire : $dH = 0 \Rightarrow \delta Q_e + \delta Q_a = \delta Q_s$

- **Equation différentielle en $\boldsymbol{\Phi_{th}}$** :
$\Longrightarrow \Phi_{th}(r) + \varphi dV = \Phi_{th}(r+dr) \Longrightarrow \Phi_{th}(r) + \varphi 2\pi rLdr = \Phi_{th}(r+dr)$
$\Longrightarrow \varphi 2\pi rLdr = \Phi_{th}(r+dr) - \Phi_{th}(r) \Longrightarrow \varphi 2\pi rLdr = d\Phi_{th} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{d\Phi_{th}}{dr} = \varphi 2\pi rL}$ (1)

- **Equation différentielle en T :**

En primitivant l'équation (1) : $\frac{d\Phi_{th}}{dr} = \varphi 2\pi r L \Longrightarrow \boldsymbol{\Phi_{th} = \pi\varphi L r^2 + A}$

Loi de Fourier : $\Phi_{th} = -\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dr}$

$$\Longrightarrow -\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dr} = \pi\varphi L r^2 + A \Longrightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\pi\varphi L r^2}{\lambda 2\pi r L} - \frac{A}{\lambda 2\pi r L} \Longrightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\varphi}{2\lambda} r - \frac{A}{\lambda 2\pi r L}$$

$\frac{dT}{dr}$ ne peut tendre vers l'infini si r ⟶ 0, donc $A = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{dT}{dr} = -\frac{\varphi}{2\lambda} r}$

2. On a : $T(R) = T_e$

En séparant les variables et en intégrant en r quelconque et R, on trouve :

$$T(r) - T_e = -\frac{\varphi}{4\lambda}(r^2 - R^2) \Rightarrow \boldsymbol{T(r) = T_e - \frac{\varphi}{4\lambda}(r^2 - R^2)}$$

3. **Pour $\boldsymbol{T = T_{max}}$,** $\boldsymbol{\frac{dT}{dr}} = -\frac{\varphi}{2\lambda} r = 0 \Longrightarrow r = 0$

On obtient :$\boldsymbol{T_{max} = T(r = 0) = T_e + \frac{\varphi}{4\lambda} R^2}$

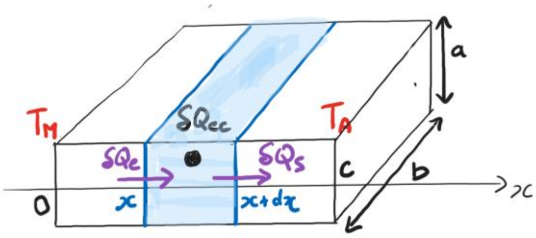
4. **Pour $\boldsymbol{R = R_{lim}}$:** $T_{max} = T_f \Rightarrow T_f = T_e + \frac{\varphi}{4\lambda} R_{lim}^2 \Longrightarrow \boldsymbol{R_{lim} = \sqrt{\frac{4\lambda}{\varphi}(T_f - T_e)}}$

L'A.N. donne : $\boldsymbol{R_{lim} = 1{,}2\ cm}$. La valeur de 1,0 cm est bien choisie car la fusion du crayon n'intervient pas.

Modélisation du manche par un parallélépipède rectangle :

épaisseur a, largeur b, section $S = ab$ et longueur c, avec $c \gg b \gg a$

Système d'étude : tranche d'épaisseur dx, comprise entre x et $x + dx$, entre les instants t et $t + dt$



en prenant $\boldsymbol{T_M} = 373\ \boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{T_A} = 298\ \boldsymbol{K}$

Evolution monobare avec $P_i = P_f = P_{ext} = cst \Longrightarrow dH = H(t + dt) - H(t) = \delta Q_e - \delta Q_s - \delta Q_{cc}$

En régime stationnaire : $dH = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\delta Q_e - \delta Q_s - \delta Q_{cc}} = 0$

avec : δQ_e : transfert thermique reçu (algébrique) par conduction thermique à travers $S = ab$
δQ_s : transfert thermique évacué (algébrique) par conduction thermique à travers $S = ab$
δQ_{cc} : quantité de chaleur perdue par transfert conducto-convectif au niveau de la surface latérale $S_{lat} = 2(a + b)dx \approx 2bdx$

$\delta Q_e = \Phi_{th}(x)dt$ $\qquad$ $\delta Q_s = \Phi_{th}(x + dx)dt$ $\qquad$ $\delta Q_{cc} = hS_{lat} \times (T - T_A)dt = 2hbdx \times (T - T_A)dt$

$$\Longrightarrow \Phi_{th}(x)dt = \Phi_{th}(x + dx)dt + 2hbdx \times (T - T_A)dt \Longrightarrow \Phi_{th}(x + dx) - \Phi_{th}(x) = -\,2hbdx \times (T - T_A) \Rightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx}dx$$
$$= -2hbdx \times (T - T_A) \Rightarrow \boldsymbol{\frac{d\Phi_{th}}{dx}} = -2\boldsymbol{hb} \times (\boldsymbol{T - T_A})$$

Loi de Fourier : $\Phi_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} S' \Longrightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx} = -\lambda S' \frac{d^2T}{dx^2} = -\lambda ab \frac{d^2T}{dx^2}$

L'équation différentielle s'écrit donc : $-\lambda ab \frac{d^2T}{dx^2} = -2hb \times (T - T_A) \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a} \times (T - T_A)} = 0$

$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \times (T - T_A) = 0$ $\qquad$ avec $L = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \times (T - T_A) = 0 \Longrightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{L^2} = -\frac{T_A}{L^2}$$

Solution de l'équation différentielle : $\boldsymbol{T(x) = Ae^{-\frac{x}{L}} + Be^{+\frac{x}{L}} + T_A}$

avec (AN), en prenant $a \approx 1\ mm$: $L = 2{,}8 \times 10^{-2} m = 2{,}8\ cm$ $\qquad$ or x peut être égale à $c \approx 20cm$, donc le terme en $e^{+\frac{x}{L}}$ ne peut exister, il tendrait vers des valeurs invraisemblables de température. Par conséquent, nécessairement $\boldsymbol{B} = 0$.

D'où : $T(x) = Ae^{-\frac{x}{L}} + T_A$

Condition aux limites : $T(x = 0) = T_M \Longrightarrow T_M = A + T_A \Longrightarrow A = T_M - T_A$

Au final : $\boldsymbol{T(x) = (T_M - T_A)e^{-\frac{x}{L}} + T_A}$

En estimant qu'il est conseillé de tenir le manche à 35°C : $\boldsymbol{T(x_{limite})} = 308\ \boldsymbol{K}$; en prenant $\boldsymbol{T_M} = 100\ \boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{T_A} = 298\ \boldsymbol{K}$

$$T(x_{douleur}) = (T_M - T_A)e^{-\frac{x_{limite}}{L}} + T_A \Longrightarrow e^{-\frac{x_{douleur}}{L}} = \frac{T(x_{limite}) - T_A}{T_M - T_A} \Longrightarrow -\frac{x_{limite}}{L} = ln\left(\frac{T(x_{limite}) - T_A}{T_M - T_A}\right)$$

$\Longrightarrow \boldsymbol{x_{limite} = -L \times ln\left(\frac{T(x_{limite}) - T_A}{T_M - T_A}\right)}$ $\qquad$ AN : $\boldsymbol{x_{limite}} = 5{,}7 \times 10^{-2}\boldsymbol{m} = 5{,}7\ \boldsymbol{cm}$ **selon ce modèle**

• obj 1 : temps total de solidification (Δt_{tot})

$$\text{bille liquide } T_{initiale} \xrightarrow[\Delta t_1]{(1)} \text{bille liquide } T_{fusion} \xrightarrow[\Delta t_2]{(2)} \text{bille solide } T_{fusion}.$$

$\Delta t_{tot} = \Delta t_1 + \Delta t_2$ avec Δt_2 déterminé dans la question simple.

phase (1) : { bille de plomb liquide de rayon r }

Évolution isobare : $dH = \delta Q \Rightarrow mc\,dT = h(T_{ext} - T)S\,dt$

$$\Rightarrow mc\frac{dT}{dt} + hST = hST_{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{hS}{mc}T = \frac{hS}{ms}T_{ext}$$

on pose $\tau = \dfrac{mc}{hS} = \dfrac{\rho_{Pb}\, r\, c}{3h}$

$$\Rightarrow T(t) = Ae^{-t/\tau} + T_{ext} \underset{T(t=0)=T_{initiale}}{\Longrightarrow} (T_{initiale} - T_{ext})e^{-t/\tau} + T_{ext}$$

Soit t_1 le temps tel que $T(t=t_1) = T_{fus}$

$$\Rightarrow t_1 = \tau \ln \frac{T_{initiale} - T_{ext}}{T_{fus} - T_{ext}} = \frac{\rho_{Pb}\, r\, c}{3h} \ln\left(\frac{T_{initiale} - T_{ext}}{T_{fus} - T_{ext}}\right)$$

AN : $t_1 = 1\ s$

- { bille de plomb liquide de rayon r à la t° T_{fus} }.

Solidification isobare $\Rightarrow \Delta H = Q$

avec $\Delta H = -m\,\ell_{fus} = -\rho_{Pb}\,\frac{4}{3}\pi r^3\,\ell_{fus}$

$$Q = \phi\,\Delta t = h\,(T_{ext} - T_{fus})\,4\pi r^2\,\Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\rho_{Pb}\,\frac{4}{3}\pi r^3\,\ell_{fus}}{4\pi r^2\,h\,(T_{fus} - T_{ext})} = \frac{\rho_{Pb}\,r\,\ell_{fus}}{3h\,(T_{fus} - T_{ext})}$$

AN : $\Delta t = 6{,}1\ \mathrm{s}$