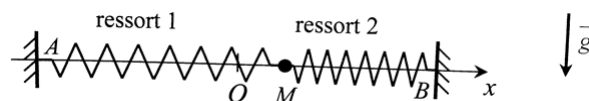


TD Physique n°6 : Oscillateurs mécaniques

(BCPST1) Exercice n°1 : Oscillateur à deux ressorts

Un petit anneau assimilé à un point matériel M de masse m est astreint à glisser sans frottement le long d'une tige horizontale de direction (Ox) . Cet anneau est relié par deux ressorts linéaires à deux points fixes A et B distants de D .

Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur à vide ℓ_0 . Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent ℓ_{eq} , et l'anneau se trouve à l'origine O de l'axe. On se place dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen. A $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position $x_0 \neq 0$.

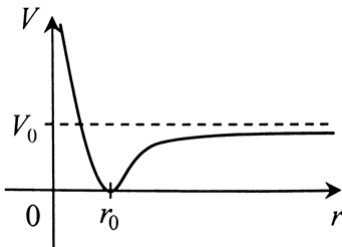


1. (**) Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$ de l'anneau M.
2. (*) Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 en fonction de k et m .
3. (*) Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
4. (**) Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p , de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie mécanique E_m de l'anneau en fonction de tout ou partie des grandeurs k , x_0 , ω_0 et t . Par convention, $E_p = 0$ pour $x = 0$. Représenter l'allure de ces énergies en fonction du temps sur un même graphe.

Exercice n°2 : Molécule diatomique

Une molécule de monoxyde de carbone (CO) est modélisée par deux masses ponctuelles, m_C pour l'atome de carbone et m_O pour l'atome d'oxygène. On néglige la gravitation.

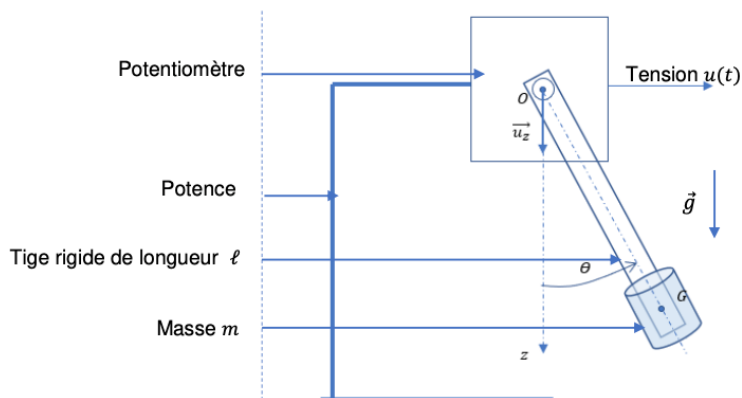


1. A l'échelle atomique, on doit utiliser la mécanique quantique pour déterminer les niveaux d'énergie réellement possibles pour la molécule : on obtient $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h f_0$ avec n un entier naturel et h la constante de Planck.
 - a. (*) Calculer numériquement l'écart entre deux niveaux d'énergie successifs : $E_{n+1} - E_n$.
 - b. (*) En déduire la longueur d'onde λ , puis le nombre d'onde $\sigma = 1/\lambda$ (en cm^{-1}) d'un photon absorbé par la molécule lors d'une transition de E_n à E_{n+1} . Comparer aux valeurs données dans la table de spectroscopie infrarouge pour les liaisons C=O des molécules organiques.
2. (**) L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique de Morse : $V(r) = V_0[1 - e^{-\beta(r-r_0)}]^2$ où r est la distance entre les noyaux des deux atomes et où V_0 , β et r_0 sont des constantes positives avec $\beta r_0 \gg 1$. Que représentent physiquement les grandeurs V_0 et r_0 ? Quelle est la dimension de β ?
 
3. (**) Montrer que proche de r_0 , l'énergie potentielle d'interaction peut être modélisée par celle d'un ressort de constante de raideur k que l'on calculera. On précise que $e^x \approx 1 + x$ si x est proche de 0.
4. (**) Dans le cadre de cette approximation, on souhaite établir l'équation différentielle décrivant la vibration de la molécule. C'est un système à deux points mais on peut considérer que son énergie mécanique est celle d'une particule fictive de masse $m = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O}$, d'abscisse r sur un axe fixe, soumise à $V(r)$. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$, et en déduire la fréquence f_0 des petites oscillations.

Données : $V_0 = 10,77 \text{ eV}$; $\beta = 2,31 \cdot 10^{10} \text{ SI}$; $M_C = 12 \text{ g.mol}^{-1}$; $M_O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$; charge élémentaire $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; constante d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$; constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$; célérité de la lumière $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Exercice n°3 : Etude d'un pendule pesant

On considère le dispositif dessiné ci-dessous (figure ci-contre) permettant d'observer le mouvement d'un pendule pesant constitué d'une tige rigide de longueur ℓ et d'une masse m fixée à son extrémité. A l'image du balancier d'une horloge ou d'une balançoire, la masse m va osciller autour du point O. La position angulaire $\theta(t)$ de la tige est repérée par rapport à l'axe vertical descendant (Oz). Un potentiomètre alimenté, fixé sur une potence et solidaire de la tige en rotation, permet d'apprécier la position angulaire $\theta(t)$ de la tige en délivrant une tension $u(t) = k\theta(t)$ avec k une constante.



Dans cette partie, nous allons travailler avec les hypothèses suivantes :

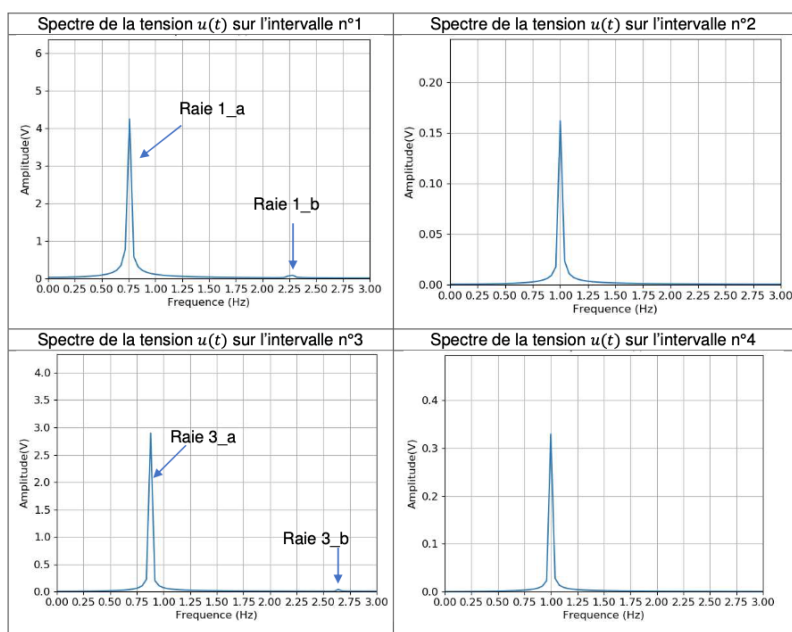
- le mouvement du pendule est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen ;
- les frottements de type fluide seront négligés ;
- on néglige également les effets dissipatifs des actions de contact entre le potentiomètre et la tige ;
- on note $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre et on néglige la poussée d'Archimède de l'air environnant ;
- on néglige la masse de la tige par rapport à la masse m dont le centre de masse $OG \approx \ell$ et on suppose que cette tige exerce sur la masse m une force $\vec{T}$ perpendiculaire à la trajectoire.

Le système oscillant est alors modélisé par un pendule simple dont l'étude se limite à celle de la masse m animée d'une vitesse algébrique v donnée par la relation $v = \ell \frac{d\theta}{dt} = \ell \dot{\theta}$.

1. (**) Etablir l'expression de l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ associée à ce pendule en fonction de g, m, ℓ et θ . On prendra $E_p(\theta = 0) = 0$.
2. (**) En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que l'angle $\theta(t)$ est solution de l'équation différentielle : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$.
3. (**) Pour cette question, on se place dans l'approximation harmonique qui impose une faible amplitude angulaire des oscillations (amplitude inférieure à 30°). Etablir l'expression de $\theta(t)$ en prenant comme conditions initiales, $\theta(t = 0) = 0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0$. Donner l'expression de la période propre des petites oscillations T_0 .

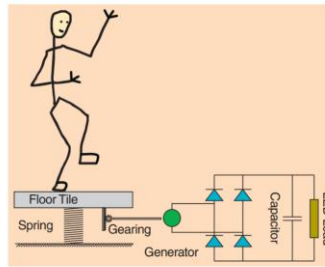
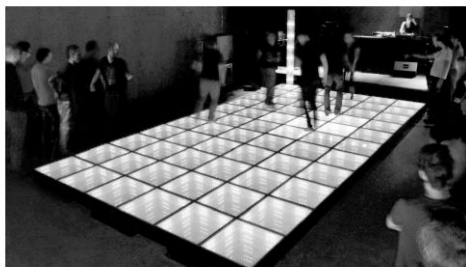
La tension $u(t) = k\theta(t)$ a été mesurée dans 4 conditions initiales durant 25 s, durée suffisamment courte pour négliger les frottements. Pour chaque condition initiale, le signal oscille sur un intervalle de tension appelé intervalle n°1, 2, 3 et 4 (figure ci-dessous).

4. (***) Pour quel(s) intervalle(s) l'isochronisme des petites oscillations est-il observé ? En déduire la fréquence propre de l'oscillateur f_0 .



Exercice n°4 : Récupération d'une énergie de vibration

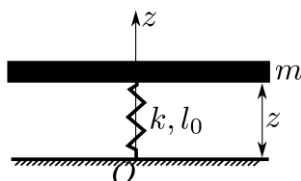
Les vibrations du sol, provoquées par les piétons, les véhicules ou le vent, peuvent fournir une énergie récupérable au moyen de dispositifs qui font l'objet de recherches récentes. Il existe par exemple des systèmes de dalles pour piétons qui produisent de l'énergie électrique, dalles qui sont disposées sur la chaussée ou, comme ici, sur une piste de danse (**document 1**). Ce problème se propose d'étudier la réponse mécanique de ce système.



Document 1 : exemple de dispositif de récupération d'énergie des vibrations du sol.
D'après le fabricant, chaque dalle peut générer 35 W.

I. Étude en régime libre

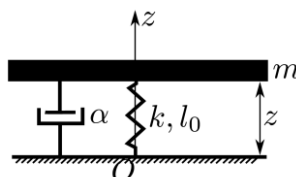
En première approximation, le système est modélisé comme une masse m (qui comprend le danseur et la dalle support) posée sur un ressort et astreinte à se déplacer verticalement. C'est donc le système du **document 2** qui nous intéresse. On note k la raideur du ressort, l_0 , sa longueur à vide. Le champ de pesanteur de norme g est dirigé vers le bas du **document 2**.



Document 2 : modèle simplifié du système réel

- (*) En raisonnant sur le système du **document 2** et à l'aide d'un bilan des forces, établir l'expression de la position d'équilibre z_e de la masse, en fonction de k , l_0 , m et g .
- (*) Établir ensuite l'équation différentielle suivie par $Z(t) = z(t) - z_e$ lorsque le système est mis en mouvement. L'équation différentielle sera notamment écrite en fonction de k et m .
- (*) Donner l'expression générale des solutions de cette équation, sans déterminer la ou les constantes d'intégration.

On constate expérimentalement que les oscillations sont amorties. Pour rendre compte de ceci, il est nécessaire d'ajouter au modèle du **document 2** un amortissement. On obtient alors le modèle du **document 3**. L'amortisseur exerce sur la masse une force $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse de la masse et α une constante positive.



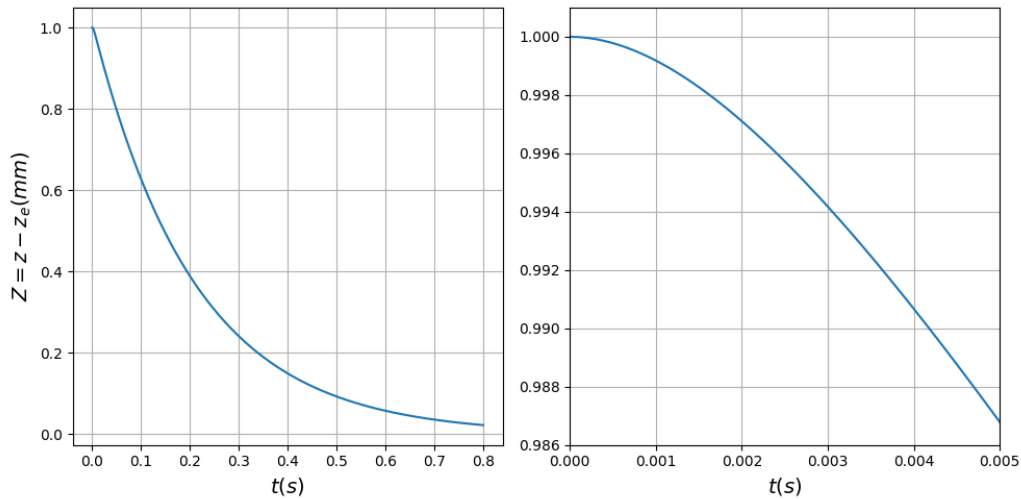
Document 3 : modèle simplifié du système réel qui prend en compte l'amortissement

- (*) En raisonnant sur le système du **document 3**, établir l'équation différentielle suivie par $Z(t) = z(t) - z_e$. L'équation différentielle sera notamment écrite en fonction de k , m et α .
- (*) Exprimer alors la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de ce système en fonction de k , m et α .
- (*) D'après le tableau de valeurs numériques ci-dessous, dans quel régime est-on ?

Tableau des paramètres retenus par le constructeur, et valeurs déduites pour quelques grandeurs :

m	k	α	ω_0	Q	$z_e - l_0$	$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$f_0 = \frac{1}{T_0}$
80 kg	$1,5 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$	$3,0 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$	$43 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	0,11	-5 mm	0,15 s	6,9 Hz

- (**) Le **document 4** ci-après montre le tracé de $Z(t) = z(t) - z_e$. En déduire les conditions initiales qui ont été choisies pour ce tracé.



Document 3 : tracé de $Z(t) = z(t) - z_e$ en fonction du temps (à gauche) et zoom aux temps courts (à droite).

8. (**) Les courbes du **document 3** ont été tracées avec le programme Python ci-dessous. L'équation différentielle devient alors : $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$. On utilise le langage de programmation Python. La méthode repose sur l'utilisation de la commande `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate`. On indique que `odeint(f, Y0, t)` résout l'équation différentielle $dY/dt = f(Y, t)$ où $Y0$ est la condition initiale et t un tableau contenant les valeurs du temps choisies pour la résolution. Une partie du script est donnée ci-dessous. Compléter les ligne 17 et 20 du script.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 t0, tmax=0, 0.8#s
6 N=10000
7 t=np.linspace(t0, tmax, N)
8
9 g=9.8 #m/s^2
10 w0=43 #rad.s-1
11 Q=0.11
12 Z0=0.001 #m
13
14 def F(y, t):
15     Z=y[0]
16     Zprim=y[1]
17     return np.array([
18
19 y0=[Z0, 0]
20 solution=odeint(
21 Z=solution[:,0]
```

II. Étude en régime sinusoïdal forcé

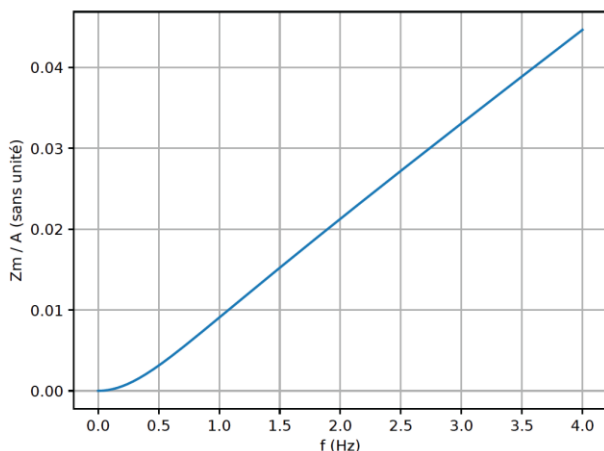
Dans la pratique, le système est mis en mouvement par le danseur qui, debout sur la dalle, bouge de haut en bas. Il est alors nécessaire d'étudier la réponse du système en régime sinusoïdal forcé. On prend la hauteur d'équilibre de la dalle comme origine, on a donc désormais $z_e = 0 \Rightarrow Z = z$.

- On note $z_d(t) = A \cos(\omega t)$ la hauteur du centre de masse du danseur (à une constante additive près). Le facteur A est positif.
- On étudie le régime permanent où la position de la dalle, repérée par rapport à sa position d'équilibre, est de la forme $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec $Z_m > 0$.
- On utilise la représentation complexe : $z_d(t)$ est représenté par $\underline{z_d}(t) = A e^{j\omega t}$, et $z(t)$ est représenté par $\underline{z}(t) = \underline{Z_m} e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z_m} = Z_m e^{j\varphi}$.

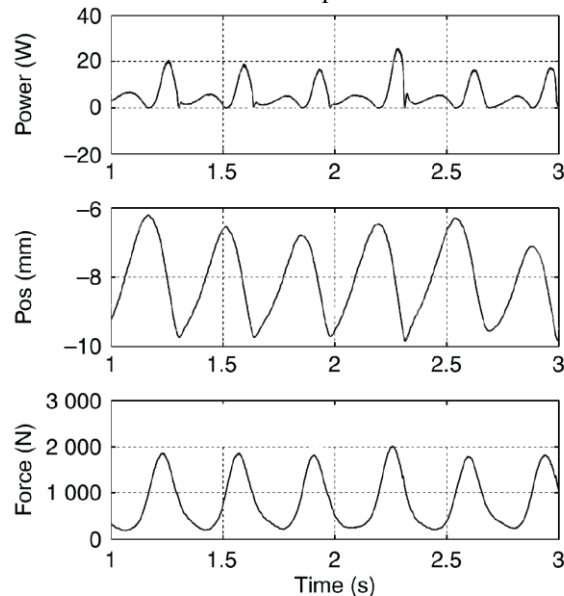
On admet qu'une démarche similaire à celle de l'étude en régime libre, mène à l'équation du mouvement suivante : $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = -\mu \ddot{z}_d$ avec les mêmes valeurs numériques que dans le tableau précédent pour ω_0 et Q , et avec μ une constante donnée par $\mu = \frac{(\text{masse du danseur})}{m} = 0,75$.

9. (**) À partir de cette équation, établir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z_m}$ en fonction de ω , ω_0 , Q , μ et A .

10. (**) En déduire une expression de l'amplitude Z_m en fonction des mêmes paramètres.
 11. (**) Donner l'expression de la limite de Z_m à basse fréquence. Faire de même à haute fréquence.



Document 5 : tracé de Z_m/A en fonction de la fréquence, à basse fréquence, à partir de l'expression établie dans cette sous-partie.



Document 6 : expérience réelle avec un danseur sur la dalle (document fourni par le constructeur). De bas en haut : enregistrement de la force produite par le danseur sur la dalle, de la position $z(t)$ de la dalle par rapport au sol (par rapport à une origine arbitraire) et de la puissance électrique produite en sortie du dispositif.

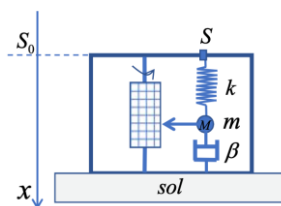
On s'intéresse maintenant à une confrontation entre notre modèle et un enregistrement en situation réelle. En exploitant les **documents 5 et 6** :

12. (**) Proposer une estimation de la valeur de la fréquence f d'excitation, ainsi que de la valeur de Z_m à cette fréquence.
 13. (**) En déduire une estimation de la valeur de l'amplitude A des mouvements du danseur.
 14. (***) D'autre part, sachant que la force exercée par le danseur sur la dalle s'écrit $F = -(masse \text{ du danseur}) \times \ddot{z}_d$, estimez l'amplitude de cette force. Cette amplitude est-elle du même ordre de grandeur que celle mesurée par le constructeur dans le **document 6** ?

Exercice n°5 : Modélisation d'un sismomètre

On modélise un sismographe par un pendule élastique vertical dont l'extrémité supérieure S est fixée à un boîtier solidaire du sol (**figure ci-contre**). A l'instant initial et en l'absence d'activité sismique, l'altitude du point S coïncide avec le point S_0 , fixe dans le référentiel terrestre supposée galiléen. Le repère (S_0, x, y, z) est le repère associé à ce référentiel.

L'axe (S_0, x) est orienté vers le bas. On note X la distance SM et g l'intensité de pesanteur. Tant que point S coïncide avec S_0 , $X = x$. Le pendule est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 et d'une masse m dont le centre d'inertie sera noté M . La masse est également soumise à une force de frottement fluide de la forme $\vec{f} = -\beta\vec{v} = -\beta\dot{X}\vec{u}_x$. Dans cette expression β est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse de la masse dans le référentiel du boîtier.



1. (**) Etablir l'expression de X , notée X_{eq} , lorsque le sismographe est au repos.

On étudie maintenant la réaction du système au passage d'une onde sismique modélisée par une oscillation sinusoïdale d'amplitude a constante. Le point S ne coïncide plus avec le point S_0 . L'abscisse x du point de suspension S dans le référentiel terrestre est variable et a pour expression $S_0S = x_s = a \cos(\omega t)$. Enfin, note $Y = X - X_{eq}$, l'allongement du ressort. Le principe de la dynamique à la masse m dans le référentiel terrestre conduit à l'équation différentielle suivante : $\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = a\omega^2 \cos(\omega t)$. En régime sinusoïdal forcé, la réponse de l'oscillateur forcé est de la forme $Y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ où φ est une constante. On introduit la pulsation réduite $u = \omega/\omega_0$ ainsi que le facteur de qualité $Q = \omega_0/2\lambda$.

2. (**) En utilisant la notation complexe, montrer que l'amplitude de la réponse A est donnée par la relation : $A = \frac{a}{\sqrt{(\frac{1}{u^2} - 1)^2 + (\frac{1}{uQ})^2}}$
 3. (**) Tracer l'allure de $A = f(u)$ en étudiant les limites et en sachant qu'une légère résonance est observée pour u proche de 1. On traitera le cas où $Q > 1$.
 4. (***) En déduire quelles ondes sismiques seront fidèlement reproduites par le sismographe.