

I. Modèle de l'oscillateur mécanique harmonique libre

1. Description du système d'étude

- **Schéma :**
- **Référentiel :**
- **Système :**
- **Forces :**

2. Aspects énergétiques

- **Rappel : $dE_m = \delta W_{nc}$**
- **Quelles sont les forces qui ne travaillent pas ?**
- **Quelles sont les forces conservatives ?**
- **Bilan : $dE_m =$ Le système est :**
- **L'énergie mécanique est alors l'intégrale première du mouvement**
 → en la dérivant par rapport au temps, on va obtenir l'équation différentielle du mouvement

3. Equation du mouvement

- *Rappel : Etablissement à l'aide de la deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique (PFD)*
- Etablissement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique :

- Résolution

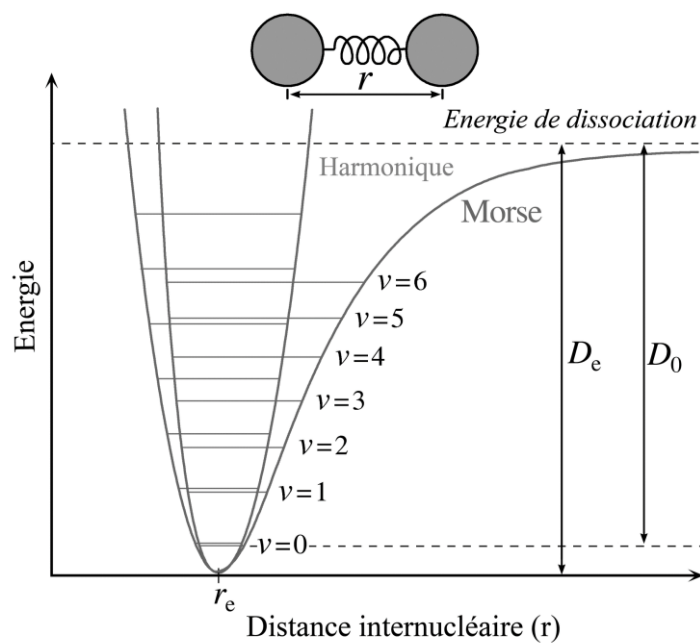
- Représentations graphiques

Généralisation : L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique s'écrit :

Exercice n°1

II. Oscillateur harmonique quantique unidimensionnel : niveaux vibrationnels d'une molécule

Classique : spectre énergétique continu $\Rightarrow$ Quantique : spectre énergétique discret



La mécanique quantique montre que les seules énergies accessibles par l'oscillateur moléculaire sont :

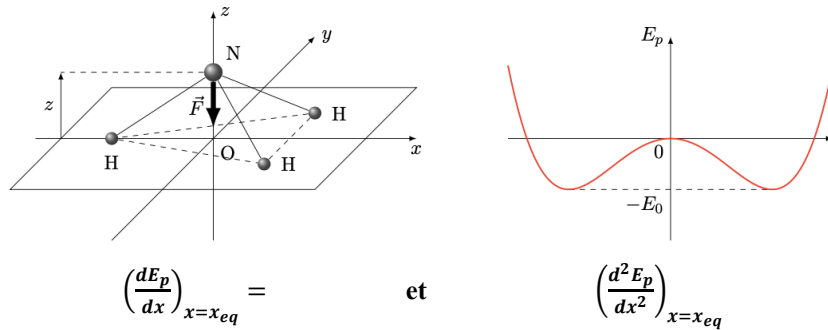
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu \text{ avec } n \text{ entier positif ou nul}$$

Exercice n°2.1

III. Approximation harmonique

1. Position du problème

Etude des mouvements de faible amplitude au voisinage d'une position d'équilibre stable



$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} > 0$$

2. Approximation locale par un puits de potentiel harmonique

En effectuant un développement limité de la fonction E_p au voisinage de la position d'équilibre et en se limitant au terme du second d'ordre :

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}} + \frac{(x - x_{eq})^2}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}$$

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + \frac{(x - x_{eq})^2}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} = E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2} k (x - x_{eq})^2$$

En posant $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} = k > 0$ et $X = (x - x_{eq})$ est l'élongation de l'oscillateur par rapport à sa position d'équilibre :

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2} k X^2$$

→ l'oscillateur se comporte comme un oscillateur harmonique en se limitant aux petits mouvements au voisinage d'un équilibre stable

Remarque :

La force dérivant de cette énergie potentielle s'écrit : $\vec{f} = f(x)\vec{u}_x$ avec $f(x) = -\frac{dE_p}{dx} = -k(x - x_{eq}) = -kX$

3. Equation différentielle linéarisé du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

Exercice n°2.2-4

III. De l'oscillateur harmonique à l'oscillateur anharmonique : l'exemple du pendule pesant

1. Description du système d'étude

- Schéma :

- Référentiel :

- Système :

- Forces :

2. Aspects énergétiques

- Rappel : $dE_m = \delta W_{nc}$
- Quelles sont les forces qui ne travaillent pas ?
- Quelles sont les forces conservatives ?
- Bilan : $dE_m =$

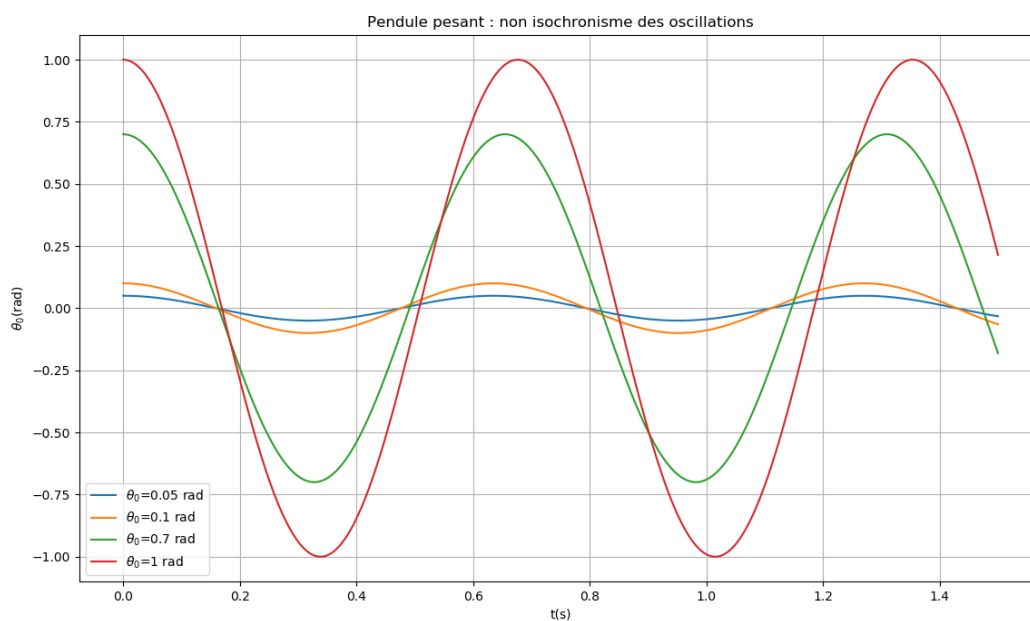
Le système est :

3. Equation du mouvement

4. Approximation harmonique aux petites oscillations du point M au voisinage de sa position d'équilibre

$$\sin\theta \approx \theta \Rightarrow$$

5. Oscillateur anharmonique : non-isochronisme des oscillations



$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta)$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

t0,tmax=0,1.5#s
N=1000
t=np.linspace(t0,tmax,N)

g=9.8 #m/s^2
l=0.10 #m
theta0=[0.05,0.1,0.7,1]

def derive(F,t):
    theta=F[0]
    thetaprim=F[1]
    return np.array([thetaprim,-g/l*np.sin(theta)])

for i in range(len(theta0)):
    F0=[theta0[i],0]
    F=odeint(derive,F0,t)
    theta=F[:,0]
    plt.plot(t,theta,label=r"$\theta_0$"+f"={theta0[i]} rad")

plt.xlabel("t(s)")
plt.ylabel(r"$\theta_0$(rad)")
plt.title("Pendule pesant : non isochronisme des oscillations")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

Exercice n°3

V. Oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux

1. Description du système d'étude

Schéma :

- Référentiel :
- Système :
- Forces :

2. Aspects énergétiques : prévision qualitative

- Rappel : $dE_m = \delta W_{nc}$
- Quelles sont les forces qui ne travaillent pas ?
- Quelles sont les forces conservatives ?
- Bilan : $dE_m =$

Le système est :

- Etablissement à l'aide de la deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique (PFD)
- Etablissement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique :

L'équation différentielle peut être écrite sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Avec : $\omega_0 = \dots\dots\dots$

$Q = \dots\dots\dots$

4. Solutions de l'équation différentielle

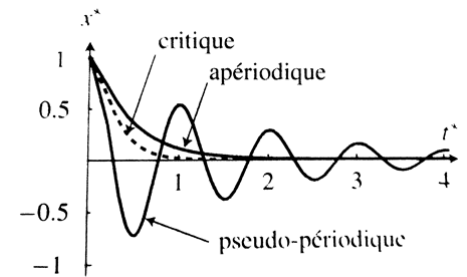
Q			
Régime			
$x(t) =$	$Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec: $r_i = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ $\Delta = (2\omega_0)^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$	$e^{-\omega_0 t} (A + Bt)$	$e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$ <u>ou</u> $Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \cos(\Omega t + \varphi)$ avec: $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
Graphique			

5. Ordre de grandeur de la durée du régime transitoire

Régime critique $Q = \frac{1}{2}$: quelques $\tau_{critique} = \frac{1}{\omega_0}$

Régime apériodique $Q < \frac{1}{2}$: quelques $\tau_{apériodique} = \frac{1}{Q\omega_0} > \tau_{critique}$ (cas où $Q \ll 1$)

Régime pseudopériodique $Q > \frac{1}{2}$: quelques $\tau_{pseudopériodique} = \frac{2Q}{\omega_0} > \tau_{critique}$



Le régime critique est le plus court de tous les régimes : il correspond au retour le plus rapide à l'équilibre

Exercice n°4.1

VI. Oscillateur mécanique forcé

1. L'oscillateur harmonique soumis à une excitation sinusoïdale

- **Description du modèle**

L'extrémité du ressort est soumise, en plus des autres forces, à une force $\vec{F} = F\vec{u}_z = F_m \cos(\omega t) \vec{u}_z$.

- Schéma :

- Référentiel :

- Système :

- Forces :

- **Equation différentielle du mouvement et résolution**

- Application du principe fondamental de la dynamique :

- En projetant sur l'axe (Oz) :

- En posant : $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{z} = Z_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ et $F = F_m \cos \omega t \Rightarrow \underline{F} = F_m e^{j\omega t}$, l'équation devient :

$$\underline{z} =$$

Et donc : $Z_m =$

$$\varphi =$$

- Tracé de Z_m en fonction de ω :

Conclusion : insuffisance du modèle

2. Effet de l'amortissement

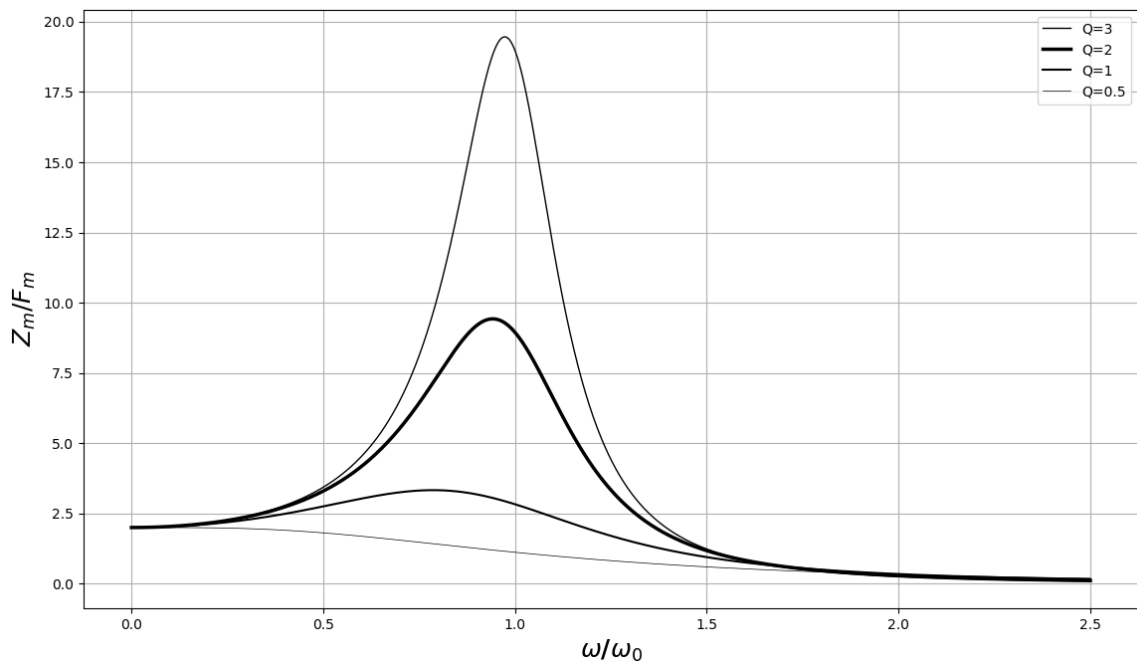
Force de frottement : $\vec{f}_{frott} = -\alpha \vec{v}$

(où α est une constante positive)

Facteur de qualité : $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

plus Q est élevé et l'intensité des forces de frottement est grande

Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

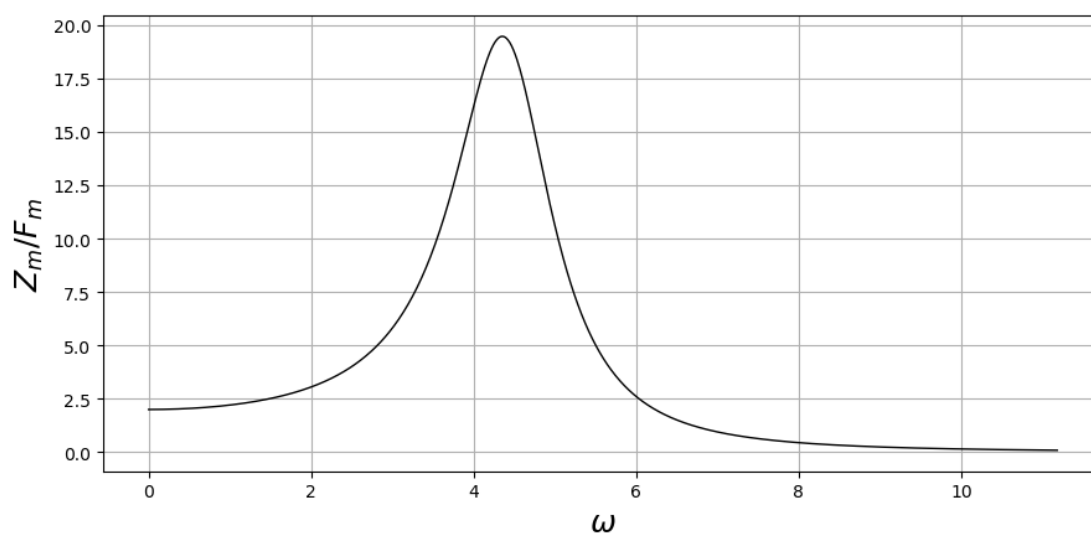


Conclusion :

- Le calcul montre qu'une **résonance** est observée si le facteur de qualité $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- Plus le facteur de qualité Q est grand, plus l'acuité de la résonance est forte (on parle de résonance aigüe)

3. Pulsation de résonance et bande-passante

Cas où $k = 80 \text{ N.m}^{-1}$ et $m = 4,0 \text{ kg} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4,47 \text{ rad.s}^{-1}$



On montre que : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ donc plus le facteur de qualité est grand et plus la bande passante est étroite.

Exercice n°4.II

Les questions à se poser à l'issue de ce chapitre

- Est-ce que je sais définir / distinguer : oscillations libres, oscillations forcées, oscillations harmoniques, oscillations amorties

Cours 1^{ère} année

- Est-ce que je sais déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un système masse – ressort en utilisant la deuxième loi de Newton ? De cette équation, est-ce que je sais déduire les expressions de la pulsation et de la période propres du mouvement ?

Oscillateurs libres

Oscillateur harmonique

- Est-ce que je sais procéder à un bilan énergétique pour déterminer l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un système masse – ressort en utilisant ?
- Est-ce que je sais dans quel cas un oscillateur quelconque peut être approximer par un oscillateur harmonique ?

Oscillateur anharmonique

- Est-ce que je sais à quoi correspond le non-isochronisme des oscillations d'un oscillateur anharmonique ?

Oscillateur amorti par frottement visqueux

- Est-ce que je sais établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un oscillateur amorti par frottement visqueux ?
- Est-ce que, de l'équation différentielle, je peux déduire la pulsation propre et le facteur de qualité ?
- Est-ce que je peux identifier les différents types de régimes selon la valeur du facteur de qualité ? Résoudre l'équation différentielle du mouvement dans les différents cas ?

Oscillateurs forcés

- Est-ce que je connais la méthode pour résoudre un problème d'oscillateur en régime sinusoïdal forcé ?
- Est-ce que je sais à quoi correspond le phénomène de résonance ? Comment celui-ci dépend du facteur de qualité ?
- Sur une courbe donnée, est-ce que je sais déterminer la valeur de la pulsation de résonance et l'intervalle de pulsations ou de fréquences correspondant à la bande passante.