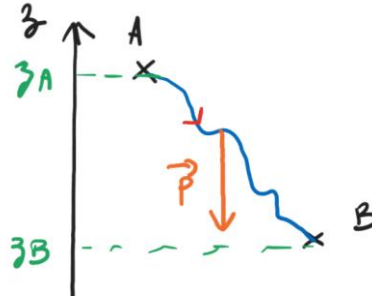


TD Physique n°5 : Approche énergétique du mouvement d'un point matériel - Correction

Application n°1 : Travail de forces conservative usuelles

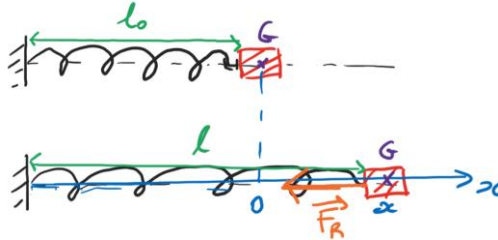
1. Travail du poids (dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme), axe (Oz) vertical orienté vers le haut :



$$\delta W = \vec{P} \cdot d\vec{OM} = P_x dx + P_y dy + P_z dz = P_z dz = -mg dz$$

$$\Rightarrow W = \int \delta W = \int_{z_A}^{z_B} -mg dz = -mg \times (z_B - z_A) = mg \times (z_A - z_B)$$

2. Travail de la force de rappel d'un ressort (de constante de raideur k) :



$$\delta W = \vec{F}_R \cdot d\vec{OM} = F_{Rx} dx + F_{Ry} dy + F_{Rz} dz = F_{Rx} dx = -k(\ell - \ell_{eq}) dx = -kx dx$$

$$\Rightarrow W = \int \delta W = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)$$

Application n°2 : Distance de freinage

1. $W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = -F \times (x_f - x_0) = -Fd$

2. **Référentiel** : terrestre (galiléen)

Système : {voiture} assimilé à un point matériel de masse m

Forces extérieures : $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}$

TEC : $\Delta E_c = \sum_i W(\vec{F}_i) = W(\vec{F}) + W(\vec{P}) + W(\vec{N})$

avec $W(\vec{P}) = W(\vec{N}) = 0$, $\vec{P}$ et $\vec{N}$ étant perpendiculaire au mouvement

$\Rightarrow \Delta E_c = W(\vec{F}) \Rightarrow E_{cf} - E_{ci} = -Fd$ avec $E_{cf} = 0$, la vitesse finale étant nulle

$\Rightarrow -\frac{1}{2}mv_i^2 = -Fd \Rightarrow F = \frac{mv_i^2}{2d}$ AN : $F = 9,7 \text{ kN}$

Application n°3 : Energies potentielles de pesanteur et élastique

1. Avec le schéma de l'Application n°1 question 1 :

Avec un axe (Oz) vertical orienté vers le haut :

$$\vec{P} = -\frac{dE_{pp}}{dz}\vec{u}_z \Rightarrow -mg\vec{u}_z = -\frac{dE_{pp}}{dz}\vec{u}_z \Rightarrow \frac{dE_{pp}}{dz} = mg \Rightarrow E_{pp} = mgz + cste$$

Généralement, on prend $E_{pp}(z = 0) = 0 \Rightarrow E_{pp} = mgz$

2. Avec le schéma de l'Application n°1 question 2 :

$$\vec{F}_R = -\frac{dE_{pe}}{dx}\vec{u}_x \Rightarrow -kx\vec{u}_x = -\frac{dE_{pe}}{dx}\vec{u}_x \Rightarrow \frac{dE_{pe}}{dx} = kx \Rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + cste$$

$$\Rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + cste$$

Généralement, on prend $E_{pe}(\ell = \ell_0) = 0 \Rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$

Application n°4 : Toboggan

1. **Référentiel** : terrestre (galiléen)

Système : {adulte} assimilé à un point matériel de masse m

Forces extérieures : $\vec{P}$: conservative

$\vec{N}$: ne travaille pas (perpendiculaire au mouvement)

TEM : $\Delta E_m = \sum_i W(\vec{F}_{nci}) = 0$

$$\Rightarrow E_{mi} = E_{mf} \Rightarrow E_{ci} + E_{pi} = E_{cf} + E_{pf} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgz_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = mg \times (z_i - z_f) \text{ car } v_i = 0$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2g(z_i - z_f)} = \sqrt{2gh} \quad \text{AN : } v_f = 9,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. En présence de la force de frottement, une force non conservative :

$$\Delta E_m = W(\vec{T})$$

$$W(\vec{T}) = -T \times AB = -T \times \frac{h}{\sin(\alpha)} = -\frac{fRh}{\sin(\alpha)}$$

Expression de R :

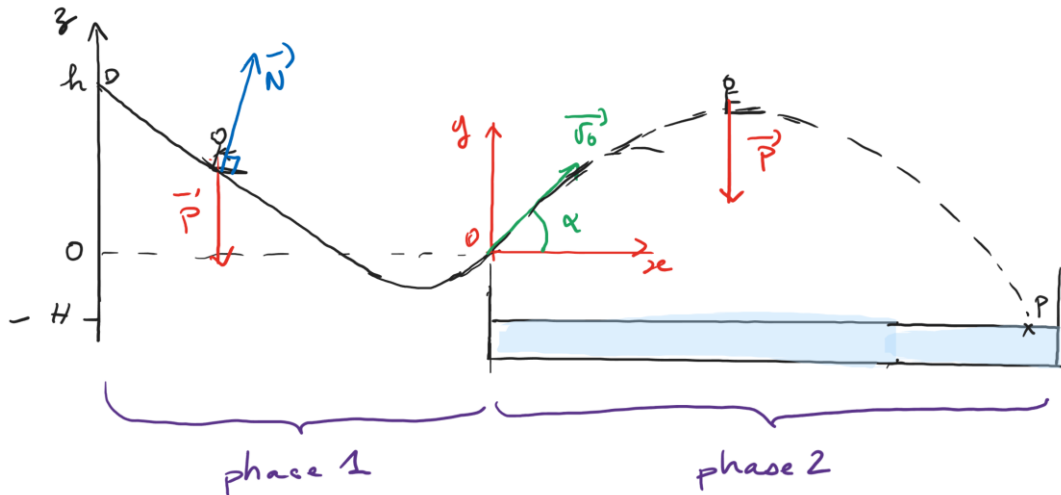
En projetant les forces sur l'axe (Oy) : $R - mg\cos(\alpha) = 0 \Rightarrow R = mg\cos(\alpha)$

$$\Rightarrow W(\vec{T}) = -\frac{fRh}{\sin(\alpha)} = -\frac{f h m g \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = -\frac{mghf}{\tan(\alpha)}$$

$$\Delta E_m = \left(\frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_f\right) - \left(\frac{1}{2}mv_i^2 + mgz_i\right) = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \times (z_f - z_i)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \times (z_f - z_i) = -\frac{mghf}{\tan(\alpha)} \Rightarrow v_f = \sqrt{2 \times \left(gh - \frac{ghf}{\tan(\alpha)}\right)} = \sqrt{2gh \times \left(1 - \frac{f}{\tan(\alpha)}\right)}$$

$$\text{AN : } v_f = 7,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercice 1 (BCPST1+2) * : Etude du mouvement d'un enfant sur un toboggan

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Système : enfant assimilé à un point matériel de masse m

Phase 1 : Glissement sur le toboggan : recherche de la vitesse v_0 de sortie du toboggan

Hypothèses : forces de frottement solide et fluide (avec l'air) négligées : obtiendra alors la vitesse maximale de sortie

Forces extérieures : $\vec{P}$, $\vec{N}$

$$\text{TEM : } \Delta E_m = \sum_i W(\vec{F}_{nct})$$

$\vec{P}$ est conservative et $\vec{N}$ ne travaille pas, le système est donc conservatif : $\Delta E_m = 0$

$$\Rightarrow E_m(z=0) = E_m(z=h) \Rightarrow E_c(z=0) + E_{pp}(z=0) = E_c(z=h) + E_{pp}(z=h)$$

En considérant que l'enfant s'élance sans vitesse initiale et en prenant un axe (Oz) verticale orienté vers le haut :

$$\Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} \quad \text{AN : } v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Phase 2 : Chute libre hors du toboggan : recherche de l'abscisse du point de chute

Hypothèses : forces de frottement fluide (avec l'air) négligées : obtiendra alors l'abscisse maximale du point de chute

Forces extérieures : $\vec{P}$

$$\text{PFD : } m\vec{a} = \vec{P}$$

Repère (O,x,y) avec origine O en sortie de toboggan et axe (Oy) vertical ascendant. L'enfant sort du toboggan avec la vitesse v_0 et un angle α avec la verticale

La projection du PFD donne : sur l'axe (Oy): $m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g$ sur l'axe (Ox): $m\ddot{x} = 0$

ce qui donne par intégration : $\dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha$ $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$

ce qui donne par nouvelle intégration : $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t$ $x = v_0 \cos \alpha t$

Au point P : $y_P = -H = -\frac{1}{2}gt_{sol}^2 + v_0 \sin \alpha t_{sol} \Rightarrow \frac{1}{2}gt_{sol}^2 - v_0 \sin \alpha t_{sol} - H = 0$

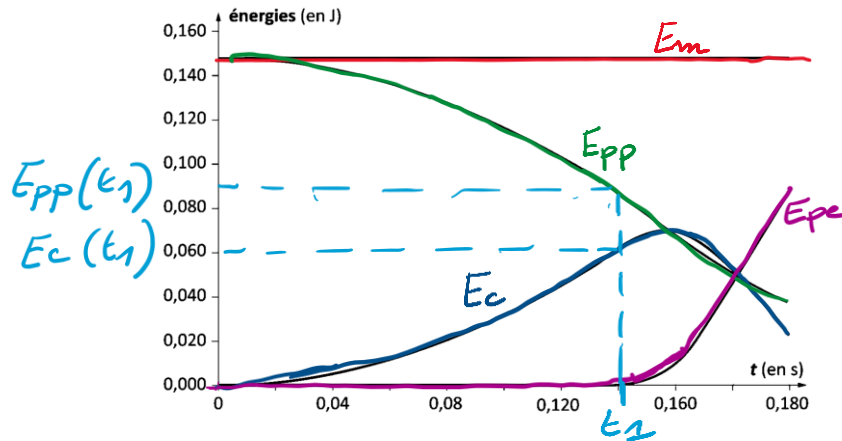
La résolution de l'équation du 2nd degré donne : $t_{sol} = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gH}}{g}$

L'abscisse vaut alors : $x_P = x(t = t_{sol}) = v_0 \cos \alpha t_{sol} = v_0 \cos \alpha \times \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gH}}{g}$ avec $v_0 = \sqrt{2gh}$

$x_P = 9,5 \text{ m}$ qui est une approximation, les frottements (solide et liquide) ayant été négligés

Exercice n°2 : Saut à l'élastique

1.



$E_c = \frac{1}{2}mv^2$: $v \nearrow$, donc $E_c \nearrow$, en début de mouvement puis $v \searrow$, donc $E_c \searrow$, à partir du rappel de l'élastique

$E_{pp} = mgz$ (axe (Oz) orienté vers le haut) : $E_{pp} \searrow$ au cours du mouvement

$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$: existe à partir du moment où l'élastique devient tendu de longueur égal à ℓ_0 , puis $\nearrow$

$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe} = cste$ en absence de frottements (mouvement conservatif : $\vec{P}$ et $\vec{F}_R$ sont deux forces conservatives)

2. La chute libre se termine lorsque l'énergie potentielle élastique devient non nulle, donc, par lecture graphique à : $t_1 = 0,140$ s

Par correspondance graphique, on lit à cette date t_1 : $E_{pp}(t = t_1) = 0,090$ J. Or $E_{pp} = mgz \Rightarrow z_1 = \frac{E_{pp}(t=t_1)}{mg} = 0,141$ m

Initialement : $E_m = E_m(t = 0) = E_{pp}(t = 0) = mgz_0 \Rightarrow z_0 = \frac{E_m}{mg} = 0,235$ m

La hauteur de chute vaut donc : $h_0 = z_0 - z_1 = 0,094$ m = 9,4 cm

3. Par correspondance graphique, on lit à la date t_1 : $E_c(t = t_1) = 0,060$ J. Or $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2E_c(t=t_1)}{m}} = 1,26$ m · s⁻¹

4. $W(\vec{F}_R) = -\Delta E_{pe} = -\frac{1}{2}k(\ell_{max} - \ell_0)^2 = -\frac{1}{2}k(z_{max} - z_1)^2$

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Système : solide de masse m assimilé à un point matériel

Forces extérieures : $\vec{P}$, $\vec{F}_R$

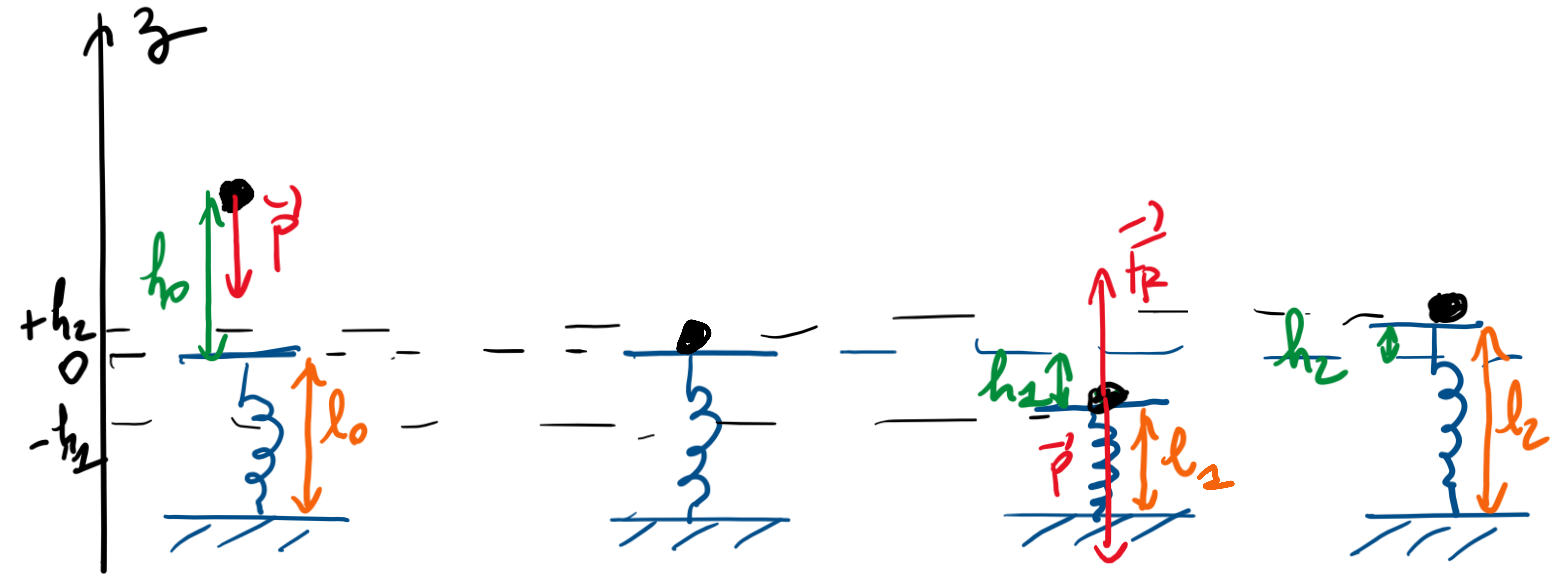
TEC : $\Delta E_c = \sum_i W(\vec{F}_i) = W(\vec{F}_R) + W(\vec{P})$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}k(z_{max} - z_1)^2 - mg \times (z_1 - z_{max}) = -\frac{1}{2}kh_1^2 + mgh_1 \quad \text{avec } h_1 = z_{max} - z_1$$

$$\text{Or } v_{max} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}kh_1^2 + mgh_1 \Rightarrow \frac{1}{2}kh_1^2 - mgh_1 - \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$$

$$h_1 = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 4 \times \frac{1}{2}k \times \frac{1}{2}mv_1^2}}{k}$$

5. $H = z_1 + h_1$. AN : $H = 0,182$ m

Exercice 3 : Théorème de l'énergie mécanique et ressort

1. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

Système : boule de pâte assimilée à un point matériel M de masse m

Hypothèses : forces de frottement solide et fluide (avec l'air) négligées

Phase de chute libre : A = point initial B = point où la boule entre en contact avec le plateau

Forces extérieures : $\vec{P}$: force conservative

$$\text{TEM : } \Delta E_m = \sum_i W(\vec{F}_{nci}) = 0 \Rightarrow E_m(B) = E_m(A)$$

Phase où le plateau s'affaisse : B = point initial C = point où le plateau s'est affaissé de la hauteur h_1

Forces extérieures : $\vec{P}$: force conservative $\vec{F}_R$: force de rappel du ressort = force conservative

$$\text{TEM : } \Delta E_m = \sum_i W(\vec{F}_{nci}) = 0 \Rightarrow E_m(B) = E_m(C)$$

Conclusion : $E_m(A) = E_m(C)$

$$\Rightarrow E_c(A) + E_{pp}(A) = E_c(C) + E_{pp}(C) + E_{pe}(C)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg(-h_1) + \frac{1}{2}k \times (\ell_1 - \ell_0)^2$$

avec $v_A = v_C = 0$ et $\ell_1 - \ell_0 = h_1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}kh_1^2 - mgh_1 - mgh_0 = 0 \quad \text{la résolution de l'équation du 2nd degré donne : } h_1 = 6,8 \text{ cm}$$

2. Par un raisonnement identique à la question précédente mais entre les points A et D, où D correspond au point de hauteur maximale h_2 atteinte par la boule :

$$E_m(A) = E_m(D) \Rightarrow mgh_0 = mgh_2 + \frac{1}{2}kh_2^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kh_2^2 + mgh_2 - mgh_0 = 0$$

la résolution de l'équation du 2nd degré donne : $h_2 = 5,8 \text{ cm}$

3. $h_2 < h_1$ car le point O n'est pas la position d'équilibre de la boule (à cause de la gravité)

4. Principe d'inertie : à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{F}_R = \vec{0} \Rightarrow -mg - k \times (\ell_e - \ell_0) = 0 \Rightarrow -mg - k \times (-h_e) = 0$
 $\Rightarrow h_e = \frac{mg}{k}$ AN : $h_e = 4,9 \text{ mm}$

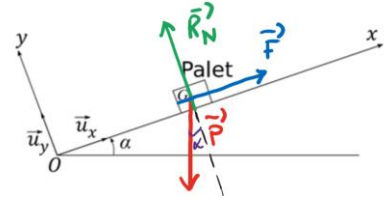
Exercice 4 : Glissement et frottement sur la glace

1. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

Système : palet assimilé à un point matériel de masse m

Hypothèses : forces de frottement solide et fluide (avec l'air) négligées

Forces extérieures : $\vec{P}$, $\vec{R}_N$, $\vec{F}$ durant la phase de propulsion



2. **Principe fondamentale de la dynamique** : $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}$

En projection sur l'axe (Ox) : $m\dot{x} = ma = -mgsin\alpha + F \Rightarrow F = ma + mgsin\alpha$

3. Mouvement uniformément accéléré $\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = cste \Rightarrow v = at \Rightarrow a = \frac{v}{t}$ (vitesse nulle initialement)
 $\Rightarrow F = m\frac{v}{t} + mgsin\alpha$ AN : $F = 0,160 \times \frac{50}{0,5} + 0,160 \times 10 \times sin(20) = 16,5 \text{ N}$

4. Si le palet n'est plus en contact avec la crosse, alors le PFD devient : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$

En projection sur l'axe (Ox) : $m\dot{x} = ma = -mgsin\alpha \Rightarrow \dot{x} = -gsin\alpha + v_0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}gsin\alpha t^2 + v_0 t$, les conditions initiales étant $\dot{x}(t=0) = v_0$ et $x(t=0) = 0$

5. Lorsque le palet s'arrête à la date t_a : $\dot{x}(t=t_a) = 0 \Rightarrow -gsin\alpha t_a + v_0 = 0 \Rightarrow t_a = \frac{v_0}{gsin\alpha}$

Le palet a parcouru la distance : $d = x(t=t_a) = -\frac{1}{2}gsin\alpha t_a^2 + v_0 t_a = -\frac{1}{2}gsin\alpha \left(\frac{v_0}{gsin\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{v_0}{gsin\alpha} = \frac{v_0^2}{2gsin\alpha}$

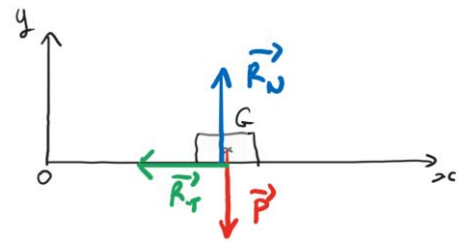
6. **L'énoncé devrait préciser qu'il est attendu l'expression du travail de la composante tangentielle $\vec{R}_T$ en fonction de f , m et g .**

En considérant que le palet se déplace sur une distance d' :

$$W(\vec{R}_T) = \int_0^{d'} \vec{R}_T \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{d'} -R_T dx = -R_T d'$$

Pour cette phase, le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$

En projection sur l'axe (Oy) : $0 = -mg + R_N + 0 \Rightarrow R_N = mg \Rightarrow R_T = f_D R_N = f_D mg$



Donc : $W(\vec{R}_T) = -f_D mgd'$

7. **TEC** : $\Delta E_c = \sum_i W(\vec{F}_i) = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) + W(\vec{R}_T) = W(\vec{R}_T)$

car $\vec{P}$ et $\vec{R}_N$ ne travaillent pas (droite d'action perpendiculaire au mouvement)

Remarque : on pourrait aussi utiliser le TEM

On obtient alors : $\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -f_D mgd'$

avec $v' = 0$ (arrêt du palet)

Finalement : $-\frac{1}{2}mv_0^2 = -f_D mgd' \Rightarrow d' = \frac{v_0^2}{2gf_D}$

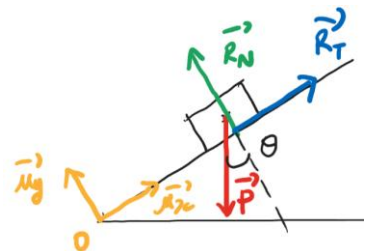
AN : $d' = \frac{50^2}{2 \times 10 \times 0,050} = 2500 \text{ m}$

8. A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T = \vec{0}$

En projection sur l'axe (Ox) : $-mgsin\theta + R_T = 0$

En projection sur l'axe (Oy) : $-mgcos\theta + R_N = 0$

Or $R_T \leq f_S R_N \Rightarrow mgsin\theta \leq f_S mgcos\theta \Rightarrow tan\theta \leq f_S$: il y a alors glissement dès que $tan\theta_{lim} = f_S$



9. AN : $f_S = 0,57$

Exercice 6 : Etude d'un oscillateur (1)

1. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

Système : point matériel M de masse m

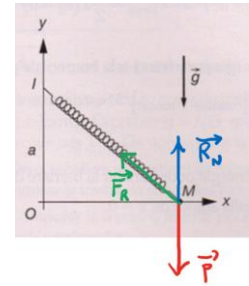
Hypothèses : forces de frottement solide et fluide (avec l'air) négligées

Forces extérieures : $\vec{P}$: perpendiculaire au mouvement donc ne travaille pas

$\vec{F}_R$: force de rappel élastique = force conservative

$\vec{R}_N$: perpendiculaire au mouvement donc ne travaille pas

TEM : $\Delta E_m = \sum_i W(\vec{F}_{nci}) = 0 \Rightarrow$ l'énergie mécanique du point M se conserve



2. $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ (à une constante près) avec $\ell = \sqrt{a^2 + x^2}$ (IOM est un triangle rectangle en O)

On en déduit :

$$E_p = \frac{1}{2}k(\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(a^2 + x^2 - 2\ell_0\sqrt{a^2 + x^2} + \ell_0^2) = \frac{1}{2}kx^2 - k\ell_0(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{à une constante près}$$

3. Recherche des **positions d'équilibre** : $\frac{dE_p}{dx} = 0$

$$\Rightarrow kx - \frac{1}{2}k\ell_0 \times 2x \times (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow x - \ell_0 \times x \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 0 \Rightarrow x \left(1 - \ell_0 \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \ell_0 \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 0 \Rightarrow \ell_0 \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \ell_0 \Rightarrow a^2 + x^2 = \ell_0^2 \Rightarrow x^2 = \ell_0^2 - a^2$$

Si $a < \ell_0$: $x = \pm \sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ Si $a > \ell_0$: il n'y a pas d'autres solutions

Bilan : si $a < \ell_0$, il existe trois positions d'équilibre pour $x = 0$, $x = \sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ et $x = -\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$
 si $a > \ell_0$, il existe une seule position d'équilibre $x = 0$

4. Les positions d'équilibre correspondent aux extrema de la courbe donnant l'énergie potentielle. La position d'équilibre est stable si $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$, et instable si $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$. Une position d'équilibre stable correspond donc à un minimum (local) d'énergie potentielle et une position d'équilibre instable à un maximum (local) d'énergie potentielle.

Courbe 1 : 1 position d'équilibre (pour $x = 0$)

Courbe 2 : 3 positions d'équilibre, 1 instable (pour $x = 0$), et deux stables (d'après la question précédente pour $x = \pm \sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ et $x = -\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$)

Exercice 6 : Etude d'un oscillateur (2)

1. En absence de forces de frottement (hypothèse) :

Poids $\vec{P}$: conservative, travaille

Force de rappel du ressort $\vec{F}_R$: conservative, travaille

Réaction du support $\vec{R}_N$: ne travaille pas (perpendiculaire au déplacement)

2. a. $E_{pp} = -mgx = -mg\cos(\theta)$ (l'axe (Ox) étant descendant)

$$b. E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(AM - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \ell_0\right)^2$$

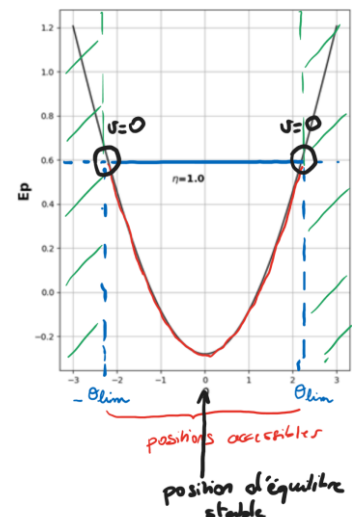
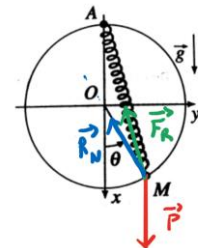
$$c. E_p = E_{pp} + E_{pe} = -mg\cos(\theta) + \frac{1}{2}k\left(2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \ell_0\right)^2 = -mg\cos(\theta) + \frac{1}{2}k\left(4a^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4a\ell_0\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \ell_0^2\right) = ka^2\left[-\frac{mg}{ka}\cos(\theta) + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{2\ell_0}{ka}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\ell_0^2}{ka^2}\right]$$

3. a. $\eta = 0,2$: 3 positions d'équilibres, 1 instable ($\theta = 0$), deux stables ($\theta = \pm 2 \text{ rad}$)
 $\eta = 1,0$: 1 position d'équilibre stable ($\theta = 0$)

b. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliqué à la particule de masse m , le théorème de l'énergie mécanique donne : $\Delta E_m = W(\vec{F}_{nc}) = 0$ si les forces de frottement sont négligées. Par conséquent : $E_m = \text{cste} = 0,6 \text{ J}$.

Or $E_m = E_c + E_p$ et $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0 \Rightarrow E_p \leq E_m = 0,6 \text{ J}$: la trajectoire est ici **bornée**, les **positions accessibles** sont comprises entre $-\theta_{lim}$ et θ_{lim} .

Par ailleurs, lorsque $E_p = E_m = 0,6 \text{ J} \Rightarrow E_c = 0 \Rightarrow v = 0$: **positions de vitesse nulle**.



Exercice 7 : Inversion de la molécule d'ammoniac

$$1. \quad E_p(z) = \beta \left(\frac{z^4}{4} - \frac{a^2 z^2}{2} \right) \Rightarrow F(z) = -\frac{dE_p(z)}{dz} = -\beta(z^3 - a^2 z)$$

2. Positions d'équilibre :

$$\frac{dE_p(z_{eq})}{dz} = 0 \Rightarrow \beta(z_{eq}^3 - a^2 z_{eq}) = 0 \Rightarrow \beta z_{eq}(z_{eq}^2 - a^2) = 0$$

Il existe donc trois positions d'équilibre : $z_{eq1} = 0$ $z_{eq2} = a$ $z_{eq3} = -a$

Stabilité des positions d'équilibre :

$$\frac{d^2 E_p(z)}{dz^2} = \beta(3z^2 - a^2)$$

$$\frac{d^2 E_p(z_{eq1=0})}{dz^2} = -\beta a^2 < 0 : \text{position d'équilibre instable} \quad \text{maximum local d'énergie potentielle}$$

$$\frac{d^2 E_p(z_{eq2=a})}{dz^2} = \frac{d^2 E_p(z_{eq3=-a})}{dz^2} = 2\beta a^2 > 0 : \text{position d'équilibre stable} \quad \text{minimum local d'énergie potentielle}$$

3. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliqué à l'atome d'azote, le théorème de l'énergie mécanique donne : $\Delta E_m = 0$ la seule force extérieure à considérer est la force électromagnétique conservative (car elle dérive d'une énergie potentielle).

Par conséquent : $E_m = \text{cste}$. Or $E_m = E_c + E_p$ et $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0 \Rightarrow E_p \leq E_m = \text{cste}$

Donc si $E_m = \text{cste} \in]-E_0; 0[$, la trajectoire est alors **bornée**, les **positions accessibles** sont comprises entre z_1 et z_2 (z étant initialement positif) :

