

## TD Physique n°6 : Oscillateurs mécaniques - Correction

### Exercice n°1 : Oscillateur à deux ressorts

1. Référentiel : terrestre supposé galiléen

Système : anneau assimilé à point matériel M de masse  $m$

Forces extérieures :  $\vec{P}, \vec{R}_N, \vec{F}_{R1}, \vec{F}_{R2}$

PFD :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{R2}$

$$(Ox) : m\ddot{x} = 0 + 0 - k(\ell_1 - \ell_0) + k(\ell_2 - \ell_0) = -k\left(\frac{D}{2} + x - \ell_0\right) + k\left(\frac{D}{2} - x - \ell_0\right) = -2kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

2.  $\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$  est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

3. La solution de l'équation différentielle s'écrit :  $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Conditions initiales :

$$x(t=0) = x_0 \Rightarrow A = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 \quad \text{avec} \quad \dot{x}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow B = 0$$

$$\text{Bilan : } x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$$

4. **Energie potentielle :**

$$E_p = E_{pp} + E_{pe1} + E_{pe2} + cste = E_{pe1} + E_{pe2} + cste' \quad E_{pp} = \text{constante car } z = \text{constante}$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k(\ell_1 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(\ell_2 - \ell_0)^2 \quad \text{à une constante près}$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2} + x - \ell_0\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2} - x - \ell_0\right)^2$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k \times \left( 2 \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2 \times (\ell_0)^2 + 2 \times x^2 + 2 \times \frac{D}{2} \times x - 2 \times \frac{D}{2} \times \ell_0 - 2 \times \ell_0 \times x - 2 \times \frac{D}{2} \times x - 2 \times \frac{D}{2} \times \ell_0 + 2 \times \ell_0 \times x \right)$$

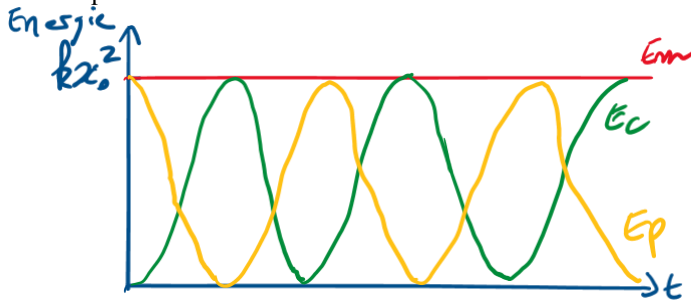
$$\Rightarrow E_p = kx^2 \Rightarrow E_p = kx_0^2\cos^2(\omega_0 t) \quad E_p(x=0) = 0$$

**Energie cinétique :**

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m \times (-x_0\omega_0\sin(\omega_0 t))^2 = \frac{1}{2}m \times x_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}m \times x_0^2 \times \frac{2k}{m} \times \sin^2(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow E_c = kx_0^2\sin^2(\omega_0 t)$$

$\Rightarrow E_m = E_p + E_c = kx_0^2 = \text{constante}$  : le système est conservatif (ce que prédit le TEM absence ici de forces non conservatives qui travaillent)



### Exercice n°2 : Molécule diatomique

1.  $V_0$  : énergie de dissociation de la liaison C-O

$r_0$  : distance d'équilibre entre les atomes C et O (valeur donnée dans les tables thermodynamiques)

$\beta(r - r_0)$  est sans dimension (comme toute grandeur dans une exponentielle) donc  $\beta$  est l'inverse d'une longueur et s'exprime en  $m^{-1}$

2.  $r \approx r_0 \Rightarrow -\beta(r - r_0) \approx 0 \Rightarrow e^{-\beta(r - r_0)} \approx 1 - \beta(r - r_0) \Rightarrow V(r) = V_0[\beta(r - r_0)]^2 = \beta^2 V_0 (r - r_0)^2$

L'énergie potentielle est sous la forme :  $E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ , donc par identification :  $\beta^2 V_0 = \frac{1}{2}k \Rightarrow k = 2\beta^2 V_0$

3.  $E_m = E_c + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \beta^2 V_0 (r - r_0)^2$

Le système est conservatif, seule la force associée à  $V(r)$  donc conservative étant présente :

$$E_m = cste \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2} m \times 2 \times \ddot{r} \times \dot{r} + \beta^2 V_0 \times 2 \times \dot{r} \times (r - r_0) \Rightarrow \ddot{r} + \frac{2\beta^2 V_0}{m} r = \frac{2\beta^2 V_0}{m} r_0$$

On reconnaît l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique, la pulsation propre  $\omega_0$  étant égale à

$$\sqrt{\frac{2\beta^2 V_0}{m}} \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\beta^2 V_0}{m}}$$

$$AN : f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \times (2,31 \cdot 10^{10})^2 \times 10,77 \times 1,602 \cdot 10^{-19}}{\left(\frac{12 \times 16}{28} \times 10^{-3} \times \frac{1}{6,02 \cdot 10^{23}}\right)}} = 6,4 \times 10^{13} \text{ Hz} \quad (m \text{ en kg pour une molécule, } V_0 \text{ en J})$$

$$4. \quad a. E_{n+1} - E_n = \left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) h f_0 - \left(n + \frac{1}{2}\right) h f_0 = h f_0 \quad AN : E_{n+1} - E_n = 1,33 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$b. E_{n+1} - E_n = \frac{hc}{\lambda} = h f_0 \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f_0} \quad AN : \lambda = 4,69 \times 10^{-6} \text{ m} = 4,69 \times 10^{-4} \text{ cm} \quad \sigma = 1/\lambda = 2132 \text{ cm}^{-1}$$

Ce qui correspond à la valeur donnée dans la table de spectroscopie infrarouge pour la vibration de la liaison CO du monoxyde de carbone

### Exercice n°3 : Etude d'un pendule pesant

$$1. \quad E_p(\theta) = -mgz + cste = -mg\ell \cos(\theta) + cste.$$

Pour  $\theta = 0$ ,  $E_p = 0$  donc  $cste = mg\ell$

$$E_p(\theta) = -mg\ell \cos(\theta) + mg\ell = mg\ell(1 - \cos(\theta))$$

2. Référentiel : terrestre galiléen

Système : la masse assimilée à un point matériel de masse  $m$

Bilan des forces :

- Le poids  $\vec{P}$  : force conservative
- La tension du fil  $\vec{T}$  : perpendiculaire à la trajectoire donc ne travaille pas

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 - mg\ell \cos(\theta) \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 - mg\ell \cos(\theta) \right) = 0 \Rightarrow m\ell^2 \ddot{\theta} + mg\ell \sin(\theta) = 0$$

$$\text{En éliminant la solution } \dot{\theta} = 0 \text{ (pendule à l'équilibre)} : \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$$

3. Méthode 1 :  $\sin(\theta) \approx \theta$  et  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

Méthode 2 : dans l'approximation harmonique :

$$E_p(\theta) = E_p(\theta = 0) + (\theta - 0) \times \left( \frac{dE_p}{d\theta} \right)_{\theta=0} + \frac{1}{2} \times (\theta - 0)^2 \times \left( \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \right)_{\theta=0} \quad \theta^2 = \frac{1}{2} mg\ell \theta^2$$

$$\text{TEM} : \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} mg\ell \theta^2 \right) = 0 \Rightarrow m\ell^2 \ddot{\theta} + mg\ell \dot{\theta} \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow T_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

4. Il y a isochronisme si la période propre  $T_0$  (ou fréquence propre  $f_0$  de l'oscillateur) ne dépend pas de l'amplitude des oscillations. Ceci semble être le cas pour les conditions 2 et 4 ( $f_0 = 1 \text{ Hz}$  pour des amplitudes faibles de 0,17 V et 0,32 V).

Remarque : lorsque les amplitudes sont plus importantes (2,9 V, intervalle 3), la fréquence de l'harmonique fondamentale baisse et il apparaît une autre harmonique, montrant que la solution n'est plus de la forme  $\theta(t) = \frac{\theta_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ .

### Exercice n°4 : Récupération d'une énergie de vibration

1. Référentiel : terrestre (supposé galiléen)

Système : masse  $m$  (modélisant le danseur et la dalle support)

Forces extérieures :  $\vec{P}$ ,  $\vec{F}_R$

A l'équilibre (principe d'inertie = 1<sup>ère</sup> loi de Newton) :  $\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_R$

$$(Oz) : 0 = -mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) \text{ avec } \ell_{eq} = z_e \Rightarrow z_e = \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

2. PFD (= 2<sup>ème</sup> loi de Newton) :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_R$

$$(Oz) : m\ddot{z} = -mg - k(z - \ell_0) \Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = -g + \frac{k}{m}\ell_0 = \frac{k}{m}z_e \Rightarrow \ddot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0$$

3. Oscillateur harmonique :  $Z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

4. PFD :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_R + \vec{F}$

$$(Oz) : m\ddot{z} = -mg - k(z - \ell_0) - \alpha\dot{z} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e \Rightarrow \ddot{Z} + \frac{\alpha}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0$$

5.  $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}$

6.  $Q = \frac{1}{2}$  : régime critique  $Q > \frac{1}{2}$  : régime pseudo-périodique  $Q < \frac{1}{2}$  : régime apériodique

$$AN : Q = \frac{\sqrt{80 \times 1,5 \times 10^5}}{3,0 \times 10^4} = 1,1 \times 10^{-1} < \frac{1}{2} : \text{régime apériodique}$$

7. A  $t=0$ ,  $Z(t=0) = 1 \text{ mm}$ .

$\dot{Z}(t=0)$  correspond à la tangente à l'origine à  $t=0$ . D'après le zoom fourni, celle-ci est nulle :  $\dot{Z}(t=0) = 0$ .

8. Ligne 17 : `return np.array([Zprim, -w0/Q*Zprim-w0**2*Z])`

Ligne 20 : `solution=odeint(F,y0,t)`

9.  $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = -\mu\ddot{z}_d \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = -\mu\ddot{z}_d \Rightarrow -\omega^2 \underline{z} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{z} + \omega_0^2 \underline{z} = \mu\omega^2 \underline{z}_d$   
 $\Rightarrow -\omega^2 \underline{z}_m + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{z}_m + \omega_0^2 \underline{z}_m = \mu\omega^2 A \Rightarrow \underline{z}_m = \frac{\mu\omega^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$

10.  $Z_m = |\underline{z}_m| = \frac{\mu\omega^2 A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$

11.  $\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_m = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} Z_m = \mu A$

12. Lecture doc6,  $\text{Power} = f(\text{Time})$  :  $T = \frac{2,9-1,25}{5} = 0,77 \text{ s} \Rightarrow f = 3,0 \text{ Hz}$  (on pourrait aussi utiliser l'un des deux autres graphiques)  
 Lecture doc6,  $\text{Pos} = f(\text{Time})$  : Valeur crête-à-crête :  $3 \text{ mm} \Rightarrow Z_m = 1,5 \text{ mm}$

13. Lecture doc5 à  $f = 3,0 \text{ Hz}$  :  $\frac{Z_m}{A} = 0,033 \Rightarrow A = 4,5 \text{ cm}$

14.  $F = -(masse \text{ du danseur}) \times \ddot{z}_d \Rightarrow \underline{F} = -(masse \text{ du danseur}) \times \underline{\ddot{z}_d} = (masse \text{ du danseur}) \times \omega^2 \underline{z}_d$   
 $\Rightarrow F_m = (masse \text{ du danseur}) \times \omega^2 \times A = (masse \text{ du danseur}) \times (2\pi f)^2 \times A$   
 AN : la masse du danseur vaut : **masse du danseur** =  $\mu \times m = 60 \text{ kg} \Rightarrow F_m = 60 \times (2\pi \times 3)^2 \times 0,045 = 9,6 \times 10^2 \text{ N}$

Lecture doc6,  $\text{Force} = f(\text{Time})$  : valeur crête-à-crête =  $1700 \text{ N} \Rightarrow F_{mexp} = 850 \text{ N}$ , ce qui est du même ordre de grandeur que la valeur précédente

### Exercice n°5 : Modélisation d'un sismomètre

1. Référentiel : terrestre galiléen

Système : la masse assimilée à un point matériel de masse  $m$

Bilan des forces au repos :

- Le poids  $\vec{P} = +mg \vec{u}_x$
- La force de rappel du ressort :  $\vec{F}_R = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x = -k(X - \ell_0) \vec{u}_x$

L'application du PFD donne :  $\vec{P} + \vec{F}_R = \vec{0}$

Après projection sur  $(S_0, x)$  :  $mg - k(X_{eq} - \ell_0) = 0$

Ainsi :  $X_{eq} = \frac{mg}{k} + \ell_0$

2. On note  $\underline{Y} = \underline{A}e^{j\omega t} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}$  solution de l'équation différentielle.

On associe également au second membre  $f(t) = \omega^2 a \cos(\omega t)$  la notation complexe  $\underline{f} = \omega^2 a e^{j\omega t}$ .

En injectant dans l'équation différentielle :

$$\left[ (\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right] \underline{A} e^{j\omega t} = \omega^2 a e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{A} = \frac{a \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$$

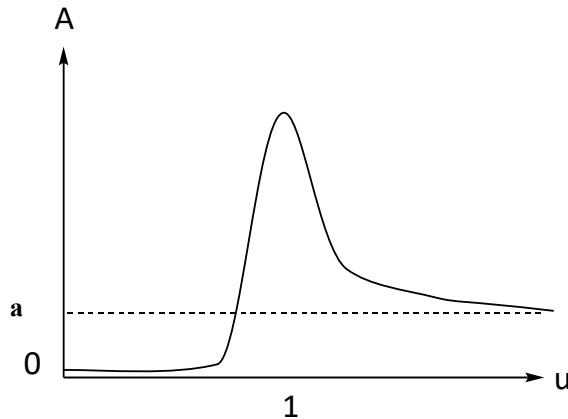
En prenant le module :  $A = \frac{a \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}}$

En posant la pulsation réduite  $u = \omega / \omega_0$  :  $A = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{uQ}\right)^2}}$

3. Pour  $u \rightarrow 0$ ,  $\lim A = 0$

Pour  $u \rightarrow \infty$ ,  $\lim A = a$

Soit la courbe :



4.  $A = a$  si  $u$  est très supérieur à 1. Le sismographe retranscrira fidèlement l'amplitude de l'onde sismique pour des **ondes de grandes fréquences**.

#### Supplément : démonstration de l'équation différentielle donnée

$$x_s = S_0 S$$

$$x_M = S_0 M$$

$$X = SM = x_M - x_s$$

$$Y = X - X_{\text{éq}}$$

Référentiel : terrestre galiléen

Système : la masse assimilée à un point matériel de masse  $m$

Bilan des forces en mouvement :

- Le poids  $\vec{P} = +mg \vec{u}_x$
- La force de rappel du ressort :  $\vec{F}_R = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x = -k(X - \ell_0) \vec{u}_x$
- La force de frottement fluide :  $\vec{F} = -\beta \dot{X} \vec{u}_x$

L'application du PFD en mouvement et dans le référentiel terrestre donne :  $\vec{P} + \vec{F}_R + \vec{F} = m\vec{a}$

$$mg \vec{u}_x - k(X - \ell_0) \vec{u}_x - \beta \dot{X} \vec{u}_x = m \frac{d^2 \vec{S}_0 \vec{M}}{dt^2}$$

Après projection sur  $(S_0, x)$  :

$$mg - k(Y + X_{\text{éq}} - \ell_0) - \beta \dot{X} = m \frac{d^2 x_M}{dt^2} = m \frac{d^2 X}{dt^2} + m \frac{d^2 x_s}{dt^2}$$

Or :

- $X_{\text{éq}} - \ell_0 = \frac{mg}{k}$
- $\dot{Y} = \dot{X}$
- $\ddot{Y} = \ddot{X}$
- $\frac{d^2 x_s}{dt^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t)$

$$-kY - \beta \dot{Y} = m \frac{d^2 Y}{dt^2} - m a \omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{k}{m} Y + \frac{\beta}{m} \dot{Y} = a \omega^2 \cos(\omega t)$$