TP Physique n°4 : Oscillations amorties et oscillations forcées

Oscillations libres amorties d'un pendule

1. On considère un pendule de longueur L portant une masse m, assimilable à un point matériel. Montrer qu'en présence de frottements fluides modélisée par la force $\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}$, l'équation différentielle associée au mouvement du pendule est :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0$$

On explicitera la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction des données du problème.

2. En se plaçant dans le cas d'un régime pseudo-périodique :

Pseudo-pulsation : $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = \frac{2\pi}{T}$ $\Rightarrow \omega_0\, T = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$

Décrément logarithmique : $\delta = ln\left(\frac{\theta(t)-\theta_\infty}{\theta(t+T)-\theta_\infty}\right) = \frac{\omega_0}{2Q}T$ $\Rightarrow \omega_0\, T = 2Q\,\delta$

De ces deux équations, on peut écrire :

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = 2Q\,\delta \Rightarrow 2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = \frac{2\pi}{\delta} \Rightarrow \sqrt{4Q^2-1} = \frac{2\pi}{\delta} \Rightarrow 4Q^2-1 = \frac{4\pi^2}{\delta^2} \Rightarrow 4Q^2 = 1+\frac{4\pi^2}{\delta^2}$$

On en déduit le facteur de qualité $\boldsymbol{Q = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{\delta^2}}}$ et donc la pulsation propre : $\boldsymbol{\omega_0 = \frac{2Q\,\delta}{T}}$

a. Déterminer, en se plaçant dans ce régime, la pseudo-période T ainsi que le décrément logarithmique δ

b. Déterminer alors le facteur de qualité Q puis la pulsation propre ω_0.

Oscillations forcées d'un ressort

A l'aide d'un moteur on impose au point d'accroche du ressort un mouvement sinusoïdal d'amplitude a et de pulsation ω. On montre qu'une fois le régime sinusoïdal forcé atteint, l'amplitude Z_m des oscillations de la masse m est une fonction de ω :

$$Z_m = \frac{a}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

où Q est le facteur de qualité et ω_0 la pulsation propre.

Dans le cas où $\boldsymbol{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ on observe un phénomène de résonance pour une pulsation ω_{res} :

$$\boldsymbol{\omega_{res} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$$

Par ailleurs, on peut montrer que le facteur de qualité s'écrit : $\boldsymbol{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$ où $\Delta\omega$ est la bande-passante en pulsation

Des mesures donnant l'amplitude Z_m des oscillations en fonction de la fréquence f d'excitation sont résumées dans le tableau suivant :

f (Hz)	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.15	2.2	2.3	2.35	2.45	2.55
Z_m (cm)	1.9		2.8	3.3	4.2	5.6	5.8	5.6	5.2	3.9		3.1

- En se plaçant à la fréquence f = 1,7 Hz, observer l'existence d'un régime transitoire précédant le régime sinusoïdal forcé.
- Déterminer (estimer) l'amplitude des oscillations à la fréquence f =1,7 Hz et à la fréquence f = 2,45 Hz
- Tracer la courbe donnant l'amplitude des oscillations en fonction de la fréquence et l'exploiter afin de déterminer le facteur de qualité de l'oscillateur. On exprimera, à l'aide des relations fournies, le facteur de qualité Q en fonction de la pulsation de résonance ω_{res} et de la bande-passante $\Delta\omega$