# TD Physique n°7 : Description d'un fluide en écoulement

## Exercice 1 : Ecoulement sur un plan incliné

1. $\overrightarrow{dF} = \pm\eta \frac{dv(z)}{dz} dS\overrightarrow{e_x} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{dF}}{dS} = \pm\eta \frac{dv(z)}{dz}\overrightarrow{e_x} = \pm\eta \times \frac{\rho g sin\theta}{\eta}(d-z)\overrightarrow{e_x} = \pm\rho g sin\theta(d-z)\overrightarrow{e_x}$
   Au niveau du **fond du canal** ($z = 0$), la force de viscosité par unité de surface est exercée par la couche de fluide supérieure : $\boldsymbol{\frac{\overrightarrow{dF}}{dS} = \rho g sin\theta d\overrightarrow{e_x}}$
   Au niveau de la **surface du liquide** ($z = d$), la force de viscosité est nulle : $\boldsymbol{\frac{\overrightarrow{dF}}{dS} = \vec{0}}$

2. $\boldsymbol{D_v = \int_{(S)} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_{(S)} v dS}$

3. $\boldsymbol{D_v = VS = V \times d \times \ell}$

4. $D_v = \int_{(S)} v dS = \int_0^d \frac{\rho g z sin\theta}{\eta}\left(d - \frac{z}{2}\right)\ell dz = \frac{\rho g \ell sin\theta}{\eta}\int_0^d \left(d \times z - \frac{z^2}{2}\right)dz = \frac{\rho g \ell sin\theta}{\eta} \times \left[\frac{dz^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right]_0^d = \frac{\rho g \ell sin\theta}{\eta} \times \left(\frac{d^3}{2} - \frac{d^3}{6}\right)$

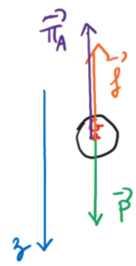
$$\Rightarrow \boldsymbol{D_v = \frac{\rho g \ell sin\theta}{\eta} \times \frac{d^3}{3}}$$

5. $D_v = \frac{\rho g \ell sin\theta}{\eta} \times \frac{d^3}{3} = V \times d \times \ell \Rightarrow \boldsymbol{V = \frac{\rho g sin\theta}{\eta} \times \frac{d^2}{3}}$

## Exercice n°2 : Sédimentation

1. **Régime de Stokes :** $\boldsymbol{C_x = \frac{24}{R_e}}$
   $C_x = \frac{24}{R_e} = \frac{24\eta}{V \times D \times \mu} \Rightarrow F = \frac{1}{2}\mu \times \frac{24\eta}{V \times D \times \mu} \times \pi\frac{D^2}{4}V^2 = 3\pi\eta D V$ $\qquad \boldsymbol{\vec{F} = -3\pi\eta D\vec{V}}$

2. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
   **Système** : particule sphérique assimilée à une sphère de masse $m = \frac{4}{3}\mu_0\pi R^3$ assimilé à un point matériel
   **Forces extérieures** s'exerçant sur la particule sphérique :



   Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \frac{4}{3}\mu_0\pi R^3\vec{g} = \frac{1}{6}\mu_0\pi D^3\vec{g}$
   Force de frottement : $\vec{F} = -3\pi\eta D\vec{v}$
   Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi_A} = -m_{fluide\ déplacé}\vec{g} = -\frac{1}{6}\mu\pi D^3\vec{g}$

   **Principe fondamental de la dynamique** : $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \overrightarrow{\Pi_A} + \vec{f}$
   En projection sur l'axe (Oz) descendant : $\frac{1}{6}\mu_0\pi D^3\frac{dv}{dt} = \frac{1}{6}\mu_0\pi D^3 g - \frac{1}{6}\mu\pi D^3 g - 3\pi\eta D v$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{3\pi\eta D}{\frac{1}{6}\mu_0\pi D^3}v = g\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dv}{dt} + \frac{18\eta}{\mu_0 D^2}v = g\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)}$$

   La solution de l'équation différentielle s'écrit : $v(t) = Kexp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{\mu_0 D^2}{18\eta} \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) = Kexp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{D^2 g}{18\eta}(\mu_0 - \mu)$ avec $\tau = \frac{\mu_0 D^2}{18\eta}$
   CI : $v(t = 0) = 0 \Rightarrow K = -\frac{D^2 g}{18\eta}(\mu_0 - \mu) \Rightarrow \boldsymbol{v(t) = \frac{D^2 g}{18\eta}(\mu_0 - \mu) \times \left(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$ avec $\boldsymbol{\tau = \frac{\mu_0 D^2}{18\eta}}$

3. $\boldsymbol{U = \lim_{t \to +\infty} v = \frac{D^2 g}{18\eta}(\mu_0 - \mu) = \frac{D^2 g \Delta\mu}{18\eta}}$

4. $T_{lim} \approx 5\tau = 5 \times \frac{\mu_0 D^2}{18\eta}$

   AN : $\boldsymbol{T_{lim}(sable\ fin) = 4,4 \times 10^{-3} s}$ $\quad$ $\boldsymbol{T_{lim}(slit) = 3,1 \times 10^{-5} s}$ $\quad$ $\boldsymbol{T_{lim}(argile) = 4,7 \times 10^{-7} s}$

   La vitesse limite est atteinte dans un temps très court par rapport au temps pour atteindre la profondeur de 4 km. On peut donc considérer la vitesse de sédimentation constante et égale à cette vitesse limite (mouvement rectiligne et uniforme).

**5.** $T_{dépôt} = \frac{h}{U}$ avec $h = 4 \times 10^3\ m$

AN : $\boldsymbol{T_{dépôt}(sable\ fin) = 14\ j}$ $\boldsymbol{T_{dépôt}(slit) = 8,5 \times 10^3\ j}$ $\boldsymbol{T_{dépôt}(argile) = 1,2 \times 10^5\ j}$

**6.** $R_e = \frac{V \times D \times \mu}{\eta} = \frac{U \times D \times \mu}{\eta} = \frac{\frac{D^2 g \Delta\mu}{18\eta} \times D \times \mu}{\eta} = \frac{g \times D^3 \times \mu \times \Delta\mu}{18\eta^2}$

AN : $\boldsymbol{R_e(sable\ fin) = 0,33}$ $\boldsymbol{R_e(slit) = 5,5 \times 10^{-5}}$ $\boldsymbol{R_e(argile) = 3,8 \times 10^{-7}}$

On se trouve bien dans le **régime de Stokes ($\boldsymbol{R_e < 1}$)**.

## Exercice 3 : Ecoulement dans un glacier

**1.** $m_{glace} = \rho_{glace} \times \left(\frac{h_{max} - h_{min}}{sin\alpha}\right) \times L \times e$ AN : $\boldsymbol{m_{glace} = 9,3 \times 10^8\ t}$

**2.** $U = \frac{h_{max} - h_{min}}{sin\alpha} \times \frac{1}{\Delta t}$ où $\boldsymbol{\Delta t = 47\ ans = 47 \times 365 \times 24 \times 3600\ s}$

AN : $\boldsymbol{U = 4,7 \times 10^{-6}\ m \cdot s^{-1} = 4,7\ \mu m \cdot s^{-1}}$

**3.** $\boldsymbol{R_e = \frac{U \times L_\perp}{\eta} \times \rho}$ où $L_\perp$ est la longueur caractéristique de l'écoulement, transverse à celui-ci : $L_\perp = e$

AN : $\boldsymbol{R_e = 5,2 \times 10^{-11} < R_{ec} \sim 2000 - 3000}$ **: le régime d'écoulement est donc laminaire**.

**4.** La force de viscosité, dirigée suivant l'axe (Ox), étant compensée par la composante du poids sur l'axe (Ox), on obtient :

$\tau dS = m_{glace} g sin\alpha = \rho_{glace} dV_{glace} g sin\alpha = \rho_{glace} z dS g sin\alpha \Longrightarrow \boldsymbol{\tau = \rho_{glace} z g sin\alpha}$

**5.** $\tau_T(z = e) = \rho_{glace} e g sin\alpha$ AN : $\boldsymbol{\tau_T(z = e) = 5,1 \times 10^5\ Pa \sim 5\ P_{atm}}$

**6.** Un fluide est newtonien si la force de viscosité s'écrit : $dF = \eta \frac{dU}{dz} dS \Longrightarrow \tau = \frac{dF}{dS} = \eta \frac{dU}{dz} \Longrightarrow \dot{\gamma} = \frac{dU}{dz} = \frac{\tau}{\eta}$, ce qui ne correspond pas à l'expression fournie du gradient des vitesses. **Le fluide n'est donc pas newtonien**.

**7.** $\dot{\gamma} = \frac{dU}{dz} = A_0 exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) {\tau_T}^3$ donc le taux de cisaillement augmente avec la température à contrainte tangentielle donnée : **la glace est moins visqueuse à haute température**.

**8.** $\boldsymbol{U(z = 0) = 0}$ **par adhérence de la glace sur la paroi fixe rocheuse**.

**9.** $\frac{dU}{dz} = A(T){\tau_T}^3 = A(T) \times \left(\rho_{glace} g sin\alpha\right)^3 \times z^3$

$\Longrightarrow U(z) = A(T) \times \left(\rho_{glace} g sin\alpha\right)^3 \times \frac{z^4}{4} + cste$

$U(z = 0) = 0 \Longrightarrow cste = 0$

On en déduit : $\boldsymbol{U(z) = A(T) \times \left(\rho_{glace} g sin\alpha\right)^3 \times \frac{z^4}{4}}$

**10.** $U(z = e) = A(T) \times \left(\rho_{glace} g sin\alpha\right)^3 \times \frac{e^4}{4} \Longrightarrow AN :$ $\boldsymbol{U(z = e) = 3,9 \times 10^{-6}\ m \cdot s^{-1} = 3,9\ \mu m \cdot s^{-1}}$

On retrouve une valeur du même ordre de grandeur qu'à la question 9.